क्रमांक

H

2017 (II)
गणित विज्ञान
प्रश्न पत्र

विषय कोड **4** *पुस्तिका कोड* **B**

समय : 3:00 घंटे *पूर्णांक : 200 अंक*

अनुदेश

1. ***आपने हिन्दी को माध्यम चुना है ।*** *इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बीस* (20 *भाग* 'A' *में* + 40 *भाग* 'B' + 60 *भाग* 'C' *में*) *बहुल विकल्प प्रश्न* (MCQ)*दिए गए हैं । आपको भाग* 'A' *में से अधिकतम* 15 *और भाग* 'B' *में* 25 *प्रश्नों तथा भाग* 'C' *में से* 20 *प्रश्नों के उत्तर देने हैं । यदि निर्धारित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तब केवल पहले भाग* 'A' *से* 15, *भाग* 'B' *से* 25 *तथा भाग* 'C' *से* 20 *उत्तरों की जांच की जाएगी।*
2. *उत्तर पत्र अलग से दिया गया है । अपना रोल नम्बर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही हैं तथा कहीं से कटे–फटे नहीं हैं । यदि ऐसा है तो आप इन्विजीलेटर से उसी कोड की पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं । इसी तरह से उत्तर पत्र को भी जांच लें । इस पुस्तिका में रफ काम करने के लिए अतिरिक्त पन्ने संलग्न हैं ।*
3. *उत्तर पत्रक के पृष्ठ* 1 *में दिए गए स्थान पर अपना रोल नम्बर, नाम तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रमांक लिखिए, साथ ही अपना हस्ताक्षर भी अवश्य करें ।*
4. ***आप अपनी ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक में रोल नंबर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित समुचित वृतों को काले बॉल पेन से अवश्य काला करें। यह एक मात्र परीक्षार्थी की जिम्मेदारी है कि वह उत्तर पुस्तिका में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विवरणों का सही तरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अंततः आपको हानि, जिससे आपकी उत्तर पुस्तिका की अस्वीकृति भी शामिल, हो सकती है ।***
5. *भाग* 'A' *में प्रत्येक प्रश्न* 2 *अंक* , *भाग* 'B' *में प्रत्येक प्रश्न के* 3 *अंक तथा भाग* 'C' *में प्रत्येक प्रश्न* 4.75 *अंक का है । प्रत्येक गलत उत्तर का ऋणात्मक मूल्यांकन भाग* 'A' *में* @ 0.5 *अंक तथा भाग* 'B' *में* @ 0.75 *अंक से किया जाएगा । भाग* 'C' *के उत्तरों के लिए ऋणात्मक मूल्यांकन नहीं है ।*
6. *भाग* 'A' *तथा भाग* 'B' *के प्रत्येक प्रश्न के नीचे चार विकल्प दिए गए हैं । इनमें से केवल एक विकल्प ही "सही" अथवा "सर्वोत्तम हल" है । आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम हल ढूंढना है । भाग* 'C' *में प्रत्येक प्रश्न का "एक" या "एक से अधिक" विकल्प सही हो सकते हैं । भाग* 'C' *में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही चयन करने पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा ।*
7. *नकल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले अभ्यार्थियों का इस और अन्य भावी परीक्षाओं के लिए अयोग्य ठहराया जा सकता है ।*
8. *अभ्यार्थी को उत्तर या रफ पन्नों के अतिरिक्त कहीं और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए ।*
9. *केलकूलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है ।*
10. ***<u>परीक्षा समाप्ति पर छिद्र बिन्दु चिन्हित स्थान से OMR उत्तर पत्रक को विभाजित करें। इन्विजीलेटर को मूल OMR उत्तर पत्रक सौंपने के पश्चात आप इसकी कॉर्बनलैस प्रतिलिपि ले जा सकते हैं।</u>***
11. *हिन्दी माध्यम/संस्करण के प्रश्न में विसंगति होने/पाये जाने पर अंग्रेजी संस्करण प्रमाणिक होगा ।*
12. *केवल परीक्षा की पूरी अवधि तक बैठने वाले प्रत्याशी को ही परीक्षा पुस्तिका साथ ले जाने की अनमति दी जाएगी ।*

रोल नंबर : ....

नाम : ....

अभ्यर्थी द्वारा भरी गई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ ।

....

इन्विजीलेटर के हस्ताक्षर

FOR ROUGH WORK

भाग\PART A

1. एक नये टायर का अधिकतम 90 km तक उपयोग किया जा सकता है। एक स्टेपनी युक्त तिपहिया वाहन कितनी अधिकतम दूरी (किमी. में) तय कर सकता है जबकि उसके सभी चारों टायर नये हैं?

1. 180
2. 90
3. 120
4. 270

1. A new tyre can be used for at most 90 km. What is the maximum distance (in km) that can be covered by a three wheeled vehicle carrying one spare wheel, all four tyres being new?

1. 180
2. 90
3. 120
4. 270

2. 2 मीटर लंबाई वाली एक सीढ़ी को एक दीवार पर इस तरह लगाना है कि वह 1.75 मीटर ऊंचाई तक पहुंचे। दीवार से सीढ़ी की अधिकतम क्षैतिज दूरी हो सकती है:-

1. 1 मीटर से थोड़ा कम
2. 1 मीटर से थोड़ा अधिक
3. 1 मीटर
4. 1.2 मीटर

2. A 2 m long ladder is to reach a wall of height 1.75 m. The largest possible horizontal distance of the ladder from the wall could be

1. slightly less than 1 m
2. slightly more than 1 m
3. 1 m
4. 1.2 m

3. निम्न कथनों में से किसका विलोम सही **नहीं** है?

1. यदि कोई रोगी श्रेष्ठतम चिकित्सा मिनले पर भी मर जाता है, तो उसकी जानलेवा बीमारी हो सकती थी।
2. यदि किसी को नौकरी मिल जाती है, तो उसकी योग्यता अच्छी है।
3. यदि कोई पूर्णांक सम है, तो वह पूर्णांक दो से विभाजित होता है।
4. यदि कोई पूर्णांक विषम है, तो वह पूर्णांक दो से विभाजित नहीं होता।

3. For which one of the following statements is the converse NOT true?

1. If a patient dies even with excellent medical care, he likely had terminal illness.
2. If a person gets employed, he has good qualifications.
3. If an integer is even, it is divisible by two.
4. If an integer is odd, it is not divisible by two.

4. एक 5 cm × 5 cm आंतरिक अनुप्रस्थ काट वाले वर्गाकर स्टैण्ड में 0.5 cm व्यास की अधिकतम कितनी बेलनाकार पेंसिलों को खड़ा किया जा सकता है?

1. 99
2. 121
3. 100
4. 105

4. What is the maximum number of cylindrical pencils of 0.5 cm diameter that can be stood in a square shaped stand of 5 cm × 5 cm inner cross section?

1. 99
2. 121
3. 100
4. 105

5. एक हरी पत्तियों वाले पौधे को एक अंधेरे कमरे में मात्र हरे प्रकाश में रखने पर हमें क्या दिखायी देगा?

1. आसपास की तुलना में पौधा अधिक चकमता दिखता है।
2. आसपास की तुलना में पौधा अधिक गहरा दिखायी देगा।
3. पौधे व पर्यावरण में कोई भेद नहीं किया जा सकता।
4. पौधे में सामान्य से अधिक प्रकाश संश्लेषण प्रक्रिया होगी।

5. If a plant with green leaves is kept in a dark room with only green light ON, which one of the following would we observe?

1. The plant appears brighter than the surroundings
2. The plant appears darker than the surroundings
3. We cannot distinguish the plant from the surroundings
4. It will have above normal photosynthetic activity

6. 12 cm भुजा वाले वर्ग के चारों कोनों से x भुजा वाले वर्गों को काटकर, तत्पश्चात् किनारों को मोड़कर एक किश्ती बनानी है। किश्ती के अधिकतम आयतन के लिए x का मान बतायें?

1. 6 cm 2. 2 cm
3. 3 cm 4. 4 cm

6. Four small squares of side x are cut out of a square of side 12 cm to make a tray by folding the edges. What is the value of x so that the tray has the maximum volume?

1. 6 cm 2. 2 cm
3. 3 cm 4. 4 cm

7. टाइलों को बिना तोड़े, 8×6 माप की n टाइलें लघुत्तम माप के वर्गाकार फर्श पर इस प्रकार बिछाई जाती हैं कि वर्ग का कोई भी भाग खाली नहीं रहता। n का मान ज्ञात कीजिये।

1. 56 2. 12
3. 24 4. 48

7. The smallest square floor which can be completely paved with tiles of size 8×6, without breaking any tile, needs n tiles. Find n.

1. 56 2. 12
3. 24 4. 48

8. दो संख्याओं का योग, 11 के वर्ग व 9 के घन के योग के बराबर है। बड़ी संख्या 25 के वर्ग से $(5)^2$ कम है। तो छोटी संख्या के 24 प्रतिशत के दो गुणे व बड़ी संख्या के आधे का योग कितना है ?

1. 415 2. 400
3. 410 4. 420

8. The sum of two numbers is equal to sum of square of 11 and cube of 9. The larger number is $(5)^2$ less than square of 25. What is the value of the sum of twice of 24 percent of the smaller number and half of the larger number?

1. 415 2. 400
3. 410 4. 420

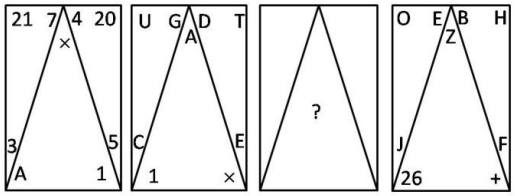
9. एक ही प्रजाति में छोटे व बड़े दोनों तरह के जीवाणु पाये जाते हैं। यदि जीवाणु का सतही क्षेत्रफल S है तथा आयतन V है तो निम्न में से कौन-सा कथन सही है?

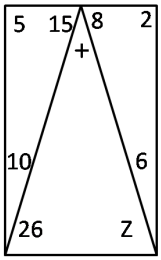
1. $S_{small} > S_{large}$
2. $V_{small} > V_{large}$
3. $(S/V)_{small} > (S/V)_{large}$
4. $(S/V)_{small} < (S/V)_{large}$

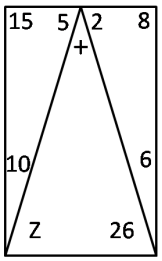
9. There are small and large bacteria of the same species. If S is surface area and V is volume, then which of the following is correct?

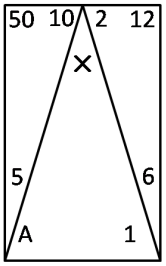
1. $S_{small} > S_{large}$
2. $V_{small} > V_{large}$
3. $(S/V)_{small} > (S/V)_{large}$
4. $(S/V)_{small} < (S/V)_{large}$

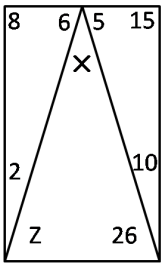
10. लापता प्रतिमान बताईये



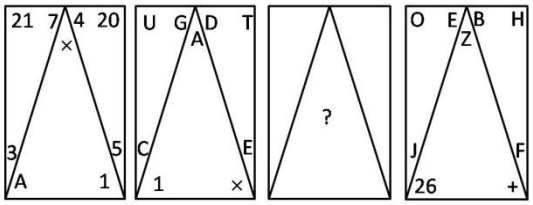
1.


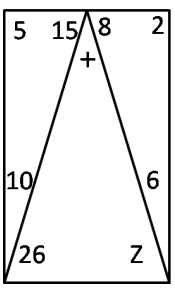
2.


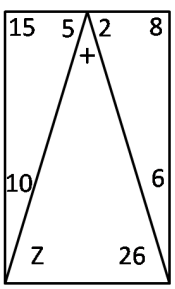
3.


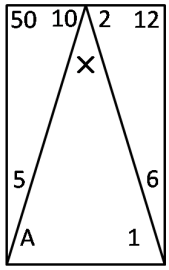
4.


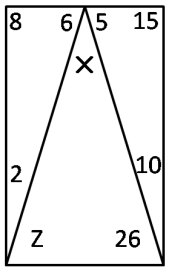
10. Find the missing pattern



1.


2.


3. 

4. 

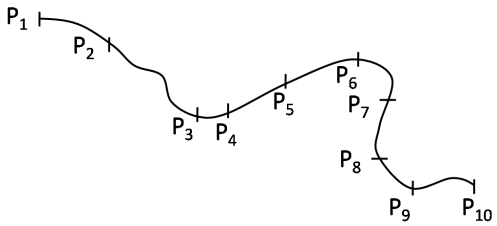
11. दो धावक A और B एक वृताकार ट्रेक के व्यास के दो विपरीत सिरों से ट्रेक की एक ही दिशा में दौड़ना प्रारंभ करते हैं। यदि A 8 km/h की नियत चाल से तथा B 6 km/h की नियत चाल से दौड़ते हुए, A 30 मिनट पश्चात् B को मिलता है तो ट्रेक की लंबाई कितनी है?

1. 1 km
2. 4 km
3. 3 km
4. 2 km

11. Two runners A and B start running from diametrically opposite points on a circular track in the same direction. If A runs at a constant speed of 8 km/h and B at a constant speed of 6 km/h and A catches up with B in 30 minutes, what is the length of the track?

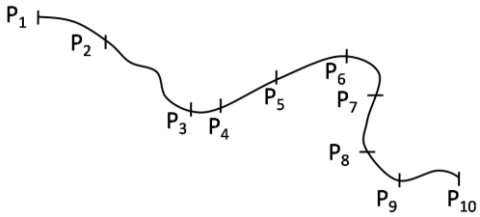
1. 1 km
2. 4 km
3. 3 km
4. 4 km

12. एक समतल धरातल के बिंदुओं P_1 तथा P_{10} के बीच एक गतिशील वस्तु का पथ दर्शाया गया है, तथा उसकी स्थितियों को 1 सैकण्ड के अंतराल पर चिन्हित किया गया है। निम्न में से कौन-सा कथन सही है?



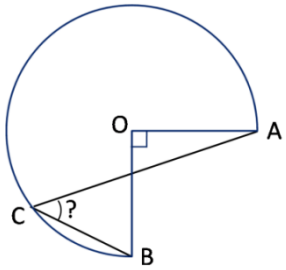
1. गति एकसमान है।
2. P_3 तथा P_4 के बीच की गति P_5 तथा P_6 के बीच की गति से अधिक है।
3. ढ़लान के कारण P_1 से P_2 तक जाने पर गति बढ़ती है।
4. P_3 से P_4 का भाग सबसे कम गति से तय किया जाता है।

12. A path between points P_1 and P_{10} on a level ground is shown, and positions of a moving object at 1 second intervals are marked. Which of the following statements is correct?



1. The motion is uniform
2. The speed between P_3 and P_4 is greater than that between P_5 and P_6
3. The speed from P_1 to P_2 increases because of downward slope
4. The section P_3 to P_4 is covered at the slowest speed

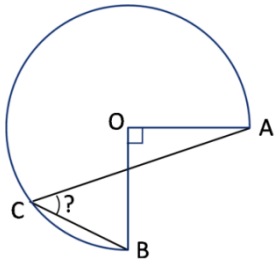
13. एक वृत्त का तीन चौथाई भाग चित्र में दर्शाया गया है OA तथा OB परस्पर लंबवत दो त्रिज्यायें है। बिंदु C वृत्त पर स्थित है।



कोण ACB का मान बताओ?

1. निर्धारित नहीं किया जा सकता
2. 30°
3. 60°
4. 45°

13. Three-quarters of a circle is shown in the figure; OA and OB are two radii perpendicular to each other. C is a point on the circle.



What is angle ACB?

1. Cannot be determined
2. 30°
3. 60°
4. 45°

14. एक $5m \times 2m$ माप की समान मोटाई वाली प्लेट का भार 20 kg है। इसमें $5cm \times 2cm$ माप के 1000 छेद किये जाते हैं। छेदने के पश्चात् प्लेट का भार (kg में) कितना है?

1. 10
2. 2
3. 19.8
4. 18

14. A plate of $5m \times 2m$ size with uniform thickness, weighing 20 kg, is perforated with 1000 holes of $5cm \times 2cm$ size. What is the weight of the plate (in kg) after perforation?

1. 10
2. 2
3. 19.8
4. 18

15. 2 m × 2 m × 10 cm माप के एक खुले गढ्ढे में कितने आयतन मृदा भरी है?

1. 40 m^3
2. 0.4 m^3
3. 0 m^3
4. 4.0 m^3

15. What is the volume of soil in an open pit of size 2 m × 2 m × 10 cm?

1. 40 m^3
2. 0.4 m^3
3. 0 m^3
4. 4.0 m^3

16. A तथा B के किन मानों के लिए $\sin A = \cot B$ है?

1. $A = B = 0$
2. $A = B = \frac{\pi}{2}$
3. $A = 0,\ B = \frac{\pi}{2}$
4. $A = \frac{\pi}{2},\ B = 0$

16. For which values of A and B is $\sin A = \cot B$?

1. $A = B = 0$
2. $A = B = \frac{\pi}{2}$
3. $A = 0,\ B = \frac{\pi}{2}$
4. $A = \frac{\pi}{2},\ B = 0$

17. 11 सेंमी लंबे, 8 सेंमी चौड़े और 20 सेंमी ऊंचे एक आयताकार फ्लास्क में 5 सेंमी ऊँचाई तक पानी भरा है। इस फ्लास्क में 1 सेंमी त्रिज्या की गोलाकार 21 संगमरमर गोलियां डाली जाती हैं। इससे पानी की सतह कितनी ऊपर उठेगी?

1. 8.8 सेंमी
2. 10 सेंमी
3. 1 सेंमी
4. 0 सेंमी

17. A rectangular flask of length 11 cm, width 8 cm and height 20 cm has water filled up to height 5 cm. If 21 spherical marbles of radius 1 cm each are dropped in the flask, what would be the rise in water level?

1. 8.8 cm
2. 10 cm
3. 1 cm
4. 0 cm

18. एक लड़के ने लंबाई l वाली एक रस्सी के एक सिरे को पकड़ा है तथा उसका दूसरा सिरा एक r $(r \ll l)$ त्रिज्या वाले पतले खंभे से बंधा है। रस्सी को तान कर वह लड़का खंभे के गिर्द चक्कर लगाकर रस्सी को खंभे पर लपेटता है। प्रत्येक चक्कर में 10 सेकण्ड लगते हैं। किस गति (प्रति सेकण्ड) से लड़का खंभे की ओर बढ़ता है?

1. $\frac{\pi r}{5}$
2. $\frac{\pi l}{5}$
3. $20\pi(r + l)$
4. $\frac{2\pi(l-r)}{5}$

18. A boy holds one end of a rope of length l and the other end is fixed to a thin pole of radius r $(r \ll l)$. Keeping the rope taut, the boy goes around the pole causing the rope to get wound around the pole. Each round takes 10 s. What is the speed (in units of s^{-1}) with which the boy approaches the pole?

1. $\frac{\pi r}{5}$
2. $\frac{\pi l}{5}$
3. $20\pi(r + l)$
4. $\frac{2\pi(l-r)}{5}$

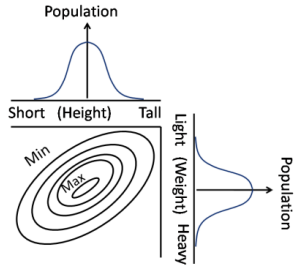
19. एक व्यक्ति किसी सुनार से सोने की दो जंजीर खरीदता है। 22 कैरेट सोने से बनी पहली जंजीर का वजन 18 ग्राम है तथा 18 कैरेट सोने से बनी दूसरी जंजीर का वजन 22 ग्राम है। निम्न में से कौन-सा कथन सही है?

1. 22 कैरेट की जंजीर में 18 कैरेट की जंजीर से $\frac{2}{11}$ गुणा ज्यादा सोना है।
2. 22 कैरेट की जंजीर में 18 कैरेट की जंजीर से $\frac{1}{11}$ गुणा ज्यादा सोना है।
3. दोनों जंजीरों में सोने की मात्रा समान है।
4. 22 कैरेट की जंजीर की अपेक्षा 18 कैरेट की जंजीर में $\frac{2}{11}$ गुणा अधिक सोना है।

19. A person purchases two chains from a jeweller, one weighing 18 g made of 22 carat gold and another weighing 22 g made of 18 carat gold. Which one of the following statements is correct?

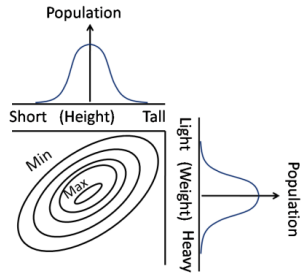
1. 22 carat chain contains $\frac{2}{11}$ times more gold than 18 carat chain
2. 22 carat chain contains $\frac{1}{11}$ times more gold than 18 carat chain
3. Both chains contain the same quantity of gold
4. 18 carat chain contains $\frac{2}{11}$ times more gold than 22 carat chain

20. द्विचर (भार, ऊँचाई) आलेख में कांटूर लगभग समान जनसंख्या वाले आलेख के भागों को जोड़ते हैं। निम्न में से कौन-सा कथन सही है?



1. जनसंख्या की ऊंचाई व भार में कोई सह-सबंध नहीं है।
2. हल्के व्यक्तियों की अपेक्षा भारी व्यक्तियों की लंबाई के कहीं अधिक होने की संभावना है।
3. लंबे व हल्के व्यक्तियों की संख्या लंबे व भारी व्यक्तियों से अधिक है।
4. मध्यम भार व मध्यम लंबाई वाले व्यक्ति नहीं हैं।

20. Contours in the bivariate (weight, height) graph connect regions of approximately equal populations. Which of the following interpretations is correct?



1. There is no correlation between height and weight of the population
2. Heavier individuals are likely to be taller than lighter individuals
3. Taller and lighter individuals are more in number than taller and heavier individuals
4. There are no individuals of medium weight and medium height

भाग\PART B

UNIT-1

21. फलन $f: X \to Y$ के लिए निम्न में से कौन-सा आवश्यकत: सही है?

1. यदि f एकैकी है, तो $g: Y \to X$ का अस्तित्व है ताकि सभी $y \in Y$ के लिए $f\big(g(y)\big) = y$ है।
2. यदि f आच्छादी है, तो $g: Y \to X$ अस्तित्व है ताकि सभी $y \in Y$ के लिए $f\big(g(y)\big) = y$ है।
3. यदि f एकैकी है, तथा Y गणनीय है, तो X परिमित है।
4. यदि f आच्छादी है, तथा X अगणनीय है, तो Y गणनीयत: परिमित है।

21. Which of the following is necessarily true for a function $f: X \to Y$?

1. if f is injective, then there exists $g: Y \to X$ such that $f\big(g(y)\big) = y$ for all $y \in Y$
2. if f is surjective, then there exists $g: Y \to X$ such that $f\big(g(y)\big) = y$ for all $y \in Y$
3. if f is injective and Y is countable then X is finite
4. if f is surjective and X is uncountable then Y is countably infinite

22. मानें कि $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, \epsilon > 0$ ताकि $\forall \delta > 0, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$. तो

1. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ संतत है$\}$
2. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ एकसमानत: संतत है$\}$
3. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ परिबद्ध है$\}$
4. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ अचर है$\}$

22. Let $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, \epsilon > 0$ such that $\forall \delta > 0, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$. Then

1. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ is continuous$\}$
2. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ is uniformly continuous$\}$
3. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ is bounded$\}$
4. $S = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ is constant$\}$

23. मानें कि $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ एकसमानत: संतत है। तो

1. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ तथा $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ का अस्तित्व है।
2. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ का अस्तित्व है, परंतु $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

3. $\lim_{x\to 0+} f(x)$ के अस्तित्व की आवश्यकता नहीं है, परंतु $\lim_{x\to\infty} f(x)$ का अस्तित्व है।
4. न तो $\lim_{x\to 0+} f(x)$ का, न $\lim_{x\to\infty} f(x)$ का अस्तित्व है।

23. Let $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ be uniformly continuous. Then
1. $\lim_{x\to 0+} f(x)$ and $\lim_{x\to\infty} f(x)$ exist
2. $\lim_{x\to 0+} f(x)$ exists but $\lim_{x\to\infty} f(x)$ need not exist
3. $\lim_{x\to 0+} f(x)$ need not exist but $\lim_{x\to\infty} f(x)$ exists
4. neither $\lim_{x\to 0+} f(x)$ nor $\lim_{x\to\infty} f(x)$ need exist

24. मानें कि D वास्तविक रेखा का एक उपसमुच्चय है। कथन: "D में प्रत्येक अनंत अनुक्रम का एक उपानुक्रम है जो D में अभिसरित होता है" पर विचारें। यह कथन सही है, यदि
1. $D=[0,\infty)$
2. $D=[0,1]\cup[3,4]$
3. $D=[-1,1)\cup(1,2]$
4. $D=(-1,1]$

24. Let D be a subset of the real line. Consider the assertion: "Every infinite sequence in D has a subsequence which converges in D". This assertion is true if
1. $D=[0,\infty)$
2. $D=[0,1]\cup[3,4]$
3. $D=[-1,1)\cup(1,2]$
4. $D=(-1,1]$

25. मानें कि सभी $n\geq 1$ के लिए, $a_1\geq 1$ तथा $a_{n+1}\geq a_n+1$ को समाधान करती वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रम $\{a_n\}_{n\geq 1}$ है। तो निम्न में कौन-सा आवश्यकत: सही है?
1. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$ अपसरित होती है।
2. अनुक्रम $\{a_n\}_{n\geq 1}$ परिबद्ध है।
3. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$ अभिसरित होती है।
4. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ अभिसरित होती है।

25. Let $\{a_n\}_{n\geq 1}$ be a sequence of real numbers satisfying $a_1\geq 1$ and $a_{n+1}\geq a_n+1$ for all $n\geq 1$. Then which of the following is necessarily true?
1. The series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$ diverges
2. The sequence $\{a_n\}_{n\geq 1}$ is bounded
3. The series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$ converges
4. The series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ converges

26. मानें कि $\mathbb{Z}$ पूर्णांकों के समुच्चय को निर्दिष्ट करता है तथा $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ समुच्चय $\{0,1,2,3,\dots\}$ को निर्दिष्ट करता है। मानचित्र $f:\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ जो $f(m,n)=2^m\cdot(2n+1)$ से दिया जाता है, पर विचारें। तो मानचित्र f है
1. आच्छादक(आच्छादी) परंतु एकैकी (एकैकी) नहीं
2. एकैकी (एकैकी) परंतु आच्छादक (आच्छादी) नहीं
3. एकैकी तथा आच्छादक दोनों
4. न तो एकैकी, न आच्छादक

26. Let $\mathbb{Z}$ denote the set of integers and $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ denote the set $\{0,1,2,3,\dots\}$. Consider the map $f:\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ given by $f(m,n)=2^m\cdot(2n+1)$. Then the map f is
1. onto (surjective) but not one–one (injective)
2. one–one (injective) but not onto (surjective)
3. both one–one and onto
4. neither one–one nor onto

27. मानें कि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ तथा $\phi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ एक द्विरैखिक मानचित्र है जो $\phi(v,w)=v^TAw$ से परभाषित है। निम्न में से सही कथन को चुनें:
1. सभी $v,w\in\mathbb{R}^2$ के लिए $\phi(v,w)=\phi(w,v)$ है।
2. सभी $w\in\mathbb{R}^2$ के लिए शून्येतर $v\in\mathbb{R}^2$ का अस्तित्व है, ताकि $\phi(v,w)=0$ हो।
3. एक 2×2 सममित आव्यूह B का अस्तित्व है ताकि सभी $v\in\mathbb{R}^2$ के लिए $\phi(v,v)=v^TBv$ है।
4. $\psi\left(\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ w_1\\ w_2\end{bmatrix}\right)=\phi\left(\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}\right)$ से परिभाषित मानचित्र $\psi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ रैखिक है।

27. Let $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ and $\phi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ be the bilinear map defined by $\phi(v,w)=v^TAw$. Choose the correct statement from below:

1. $\phi(v,w) = \phi(w,v)$ for all $v, w \in \mathbb{R}^2$
2. there exists nonzero $v \in \mathbb{R}^2$ such that $\phi(v,w) = 0$ for all $w \in \mathbb{R}^2$
3. there exists a 2×2 symmetric matrix B such that $\phi(v,v) = v^T B v$ for all $v \in \mathbb{R}^2$
4. the map $\psi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ defined by $\psi\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) = \phi\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right)$ is linear

28. मानें कि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$ तथा $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \beta \end{bmatrix}$ हैं। तो वास्तविक संख्याओं के ऊपर तंत्र $AX = b$ का

1. जब $\beta \neq 7$ है, तो कोई हल नहीं है।
2. जब $\alpha \neq 2$ है, तो अपरिमित संख्या के हल हैं।
3. यदि $\alpha = 2$ तथा $\beta \neq 7$ हैं, तो अपरिमित संख्या के हल हैं।
4. यदि $\alpha \neq 2$ है, तो एक अद्‌वितीय हल है।

28. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$ and $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \beta \end{bmatrix}$. Then the system $AX = b$ over the real numbers has

1. no solution whenever $\beta \neq 7$
2. an infinite number of solutions whenever $\alpha \neq 2$
3. an infinite number of solutions if $\alpha = 2$ and $\beta \neq 7$
4. a unique solution if $\alpha \neq 2$

29. मानें कि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है। तो न्यूनतम धन पूर्णांक n ताकि $A^n = I$ है

1. 1
2. 2
3. 4
4. 6

29. Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Then the smallest positive integer n such that $A^n = I$ is

1. 1
2. 2
3. 4
4. 6

30. मानें कि A एक वास्तविक सममित आव्यूह है तथा $B = I + iA$, जहां $i^2 = -1$ है। तो

1. यदि तथा मात्र यदि A व्युत्क्रमणीय है, B व्युत्क्रमणीय है।
2. B के सभी अभिलक्षण मान आवश्यकत: वास्तविक हैं।
3. $B - I$ आवश्यकत: व्युत्क्रमणीय है।
4. B आवश्यकत: व्युत्क्रमणीय है।

30. Let A be a real symmetric matrix and $B = I + iA$, where $i^2 = -1$. Then

1. B is invertible if and only if A is invertible
2. all eigenvalues of B are necessarily real
3. $B - I$ is necessarily invertible
4. B is necessarily invertible

31. मानें कि $S = \{x \in [-1,4] \mid \sin(x) > 0\}$ निम्न में से कोन-सा सही है?

1. निम्नक $(S) < 0$
2. उच्चक (S) अस्तित्व नहीं है
3. उच्चक $(S) = \pi$
4. निम्मक $(S) = \pi/2$

31. Let $S = \{x \in [-1,4] \mid \sin(x) > 0\}$. Which of the following is true?

1. inf $(S) < 0$
2. sup (S) does not exist
3. sup $(S) = \pi$
4. inf $(S) = \pi/2$

32. मानें कि k एक धन पूर्णांक है तथा मानें कि $S_k = \{x \in [0,1] \mid$ x के दशमलव विस्तरण में k^{th} स्थान पर एक अभाज्य अंक है$\}$। तो S_k का लेबेग माप है

1. 0
2. 4/10
3. $(4/10)^k$
4. 1

32. Let k be a positive integer and let $S_k = \{x \in [0,1] \mid$ a decimal expansion of x has a prime digit at its k^{th} place$\}$. Then the Lebesgue measure of S_k is

1. 0
2. 4/10
3. $(4/10)^k$
4. 1

Unit-2

33. मानें कि सम्मिश्र समतल में $\mathbb{D}$ एक विवृत इकाई चक्रिका है तथा $U = \mathbb{D} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ और, मानें कि $H_1 = \{f: \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f$ होलोमार्फिक तथा परिबद्‌ध है$\}$ तथा $H_2 = \{f: U \to \mathbb{C} \mid f$ होलोमार्फिक तथा परिबद्‌ध है$\}$, तो $r(f) = f|_U$ से दिये जाने वाले मानचित्र $r: H_1 \to H_2$, f से U तक का प्रतिबंध है

1. एकैकी परंतु आच्छादी नहीं
2. आच्छादी परंतु एकैकी नहीं
3. आच्छादी तथा एकैकी
4. न तो आच्छादी न एकैकी

33. Let $\mathbb{D}$ be the open unit disc in the complex plane and $U = \mathbb{D} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Also, let $H_1 = \{f: \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f$ is holomorphic and bounded$\}$ and $H_2 = \{f: U \to \mathbb{C} \mid f$ is holomorphic and bounded$\}$.
Then the map $r: H_1 \to H_2$ given by $r(f) = f|_U$, the restriction of f to U, is
1. injective but not surjective
2. surjective but not injective
3. injective and surjective
4. neither injective nor surjective

34. मानें कि C त्रिज्या 2 का एक वृत्त है, सम्मिश्र समतल के उद्गम में केंद्र के साथ, वामावर्त दिशा में विन्यासित। तो समाकल $\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2}$ इस समान है
1. $\frac{1}{2\pi i}$
2. $2\pi i$
3. 1
4. 0

34. Let C be the circle of radius 2 with centre at the origin in the complex plane, oriented in the anti-clockwise direction. Then the integral $\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2}$ is equal to
1. $\frac{1}{2\pi i}$
2. $2\pi i$
3. 1
4. 0

35. मानें कि f विवृत इकाई चक्रिका में एक होलोमार्फिक फलन है ताकि $\lim_{z\to 1} f(z)$ का अस्तितव नहीं होता। मानें कि $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z = 0$ के दायरे में f का टेलर श्रेणी है तथा R उसकी अभिसरण त्रिज्या है। तो
1. $R = 0$
2. $0 < R < 1$
3. $R = 1$
4. $R > 1$

35. Let f be a holomorphic function in the open unit disc such that $\lim_{z\to 1} f(z)$ does not exist. Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be the Taylor series of f about $z = 0$ and let R be its radius of convergence. Then
1. $R = 0$
2. $0 < R < 1$
3. $R = 1$
4. $R > 1$

36. $f(z) = e^z + e^{-z}$ से परिभाषित फलन $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
1. के परिमितत: बहुत शून्यक हैं।
2. का कोई शून्यक नहीं है।
3. के मात्र वास्तविक शून्यक हैं।
4. के अपरिमितत: बहुत शून्यक हैं।

36. The function $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ defined by $f(z) = e^z + e^{-z}$ has
1. finitely many zeros
2. no zeros
3. only real zeros
4. has infinitely many zeros

37. मानें कि $\mathbb{R}^2$ का एक संबद्ध विवृत उपसमुच्चय A है। $\bar{A}$ ($\mathbb{R}^2$ में A का संवरक) से $\mathbb{Q}$ तक के संतत आच्छादी फलनों की संख्या है:
1. 1
2. 0
3. 2
4. परिमित नहीं

37. Let A be a connected open subset of $\mathbb{R}^2$. The number of continuous surjective functions from $\bar{A}$ (the closure of A in $\mathbb{R}^2$) to $\mathbb{Q}$ is:
1. 1
2. 0
3. 2
4. not finite

38. मानें कि R 1 को समाविष्ट करते $\mathbb{Q}$ का उपवलय है। तो निम्न में कौन-सा आवश्यकत: सही है?
1. R एक मुख्य गुणजावली क्षेत्र है।
2. R में अपरिमितत: अनेक अभाज्य गुणजावलियां है।
3. R में एक अभाज्य गुणजावली है जो एक उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है।
4. R में प्रत्येक उच्चिष्ठ गुणजावली m के लिए, अवशेष क्षेत्र R/m परिमित है।

38. Let R be a subring of $\mathbb{Q}$ containing 1. Then which of the following is necessarily true?
1. R is a principal ideal domain (PID)
2. R contains infinitely many prime ideals
3. R contains a prime ideal which is not a maximal ideal
4. for every maximal ideal m in R, the residue field R/m is finite

39. $\{1, 2, 3\}$ के क्रमचयों का समूह S_3 तीन अवयवों के परिमित क्षेत्र $\mathbb{F}_3$ पर त्रिविम सदिश समष्टि पर कार्य करता है, आधार $\{e_1, e_2, e_3\}$ में सदिशों के सभी $\sigma \in S_3$ के लिए $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$ द्वारा

क्रमचयण करके। उपरोक्त कार्य के अधीन नियत सदिशों के समुच्चय की गणनसांख्यिकी है

1. 0
2. 3
3. 9
4. 27

39. The group S_3 of permutations of $\{1,2,3\}$ acts on the three dimensional vector space over the finite field $\mathbb{F}_3$ of three elements, by permuting the vectors in basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ by $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$, for all $\sigma \in S_3$. The cardinality of the set of vectors fixed under the above action is

1. 0
2. 3
3. 9
4. 27

40. मानें कि $f: \mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ फलन $f(n) = (n \bmod 4,\ n \bmod 6)$ है। तो

1. $(0 \bmod 4, 3 \bmod 6)$ f के बिंब में है।
2. $(a \bmod 4,\ b \bmod 6)$ f के बिंब में है, सभी सम पूर्णांकों a तथा b के लिए।
3. f के बिंब के यथातथ 6 अवयव हैं।
4. f की अष्टि $= 24\mathbb{Z}$ है।

40. Let $f: \mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ be the function $f(n) = (n \bmod 4,\ n \bmod 6)$. Then

1. $(0 \bmod 4, 3 \bmod 6)$ is in the image of f
2. $(a \bmod 4,\ b \bmod 6)$ is in the image of f, for all even integers a and b
3. image of f has exactly 6 elements
4. kernel of $f = 24\mathbb{Z}$

UNIT 3

41. मानें कि प्रारंभिक मान समस्या

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = x^3$$
$$u_t(x,0) = \sin x$$

का हल $u(x,t)$ है। तो $u(\pi,\pi)$ है

1. $4\pi^3$
2. π^3
3. 0
4. 4

41. Let $u(x,t)$ be the solution of the initial value problem

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = x^3$$
$$u_t(x,0) = \sin x.$$

Then $u(\pi,\pi)$ is

1. $4\pi^3$
2. π^3
3. 0
4. 4

42. वास्तविक संख्याओं λ का समुच्चय जिसके लिए सीमा मान समस्या

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

के अतुच्छ हल हैं

1. $(-\infty, 0)$
2. $\{\sqrt{n} \mid n$ एक धन पूर्णांक है$\}$
3. $\{n^2 \mid n$ एक धन पूर्णांक है$\}$
4. $\mathbb{R}$

42. The set of real numbers λ for which the boundary value problem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

has nontrivial solutions is

1. $(-\infty, 0)$
2. $\{\sqrt{n} \mid n$ is a positive integer$\}$
3. $\{n^2 \mid n$ is a positive integer$\}$
4. $\mathbb{R}$

43. मानें कि D $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ से दी जाने वाली एकक चक्रिका को निर्दिष्ट करता है तथा मानें कि D^c समतल में उसका पूरक है। आंशिक अवकल समीकरण

$$(x^2 - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1. सभी $(x,y) \in D^c$ के लिए परवलयिक है।
2. सभी $(x,y) \in D$ के लिए अतिपरवलयिक है।
3. सभी $(x,y) \in D^c$ के लिए अतिपरवलयिक है।
4. सभी $(x,y) \in D$ के लिए परवलयिक है।

43. Let D denote the unit disc given by $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ and let D^c be its complement in the plane. The partial differential equation

$$(x^2 - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{is}$$

1. parabolic for all $(x,y) \in D^c$
2. hyperbolic for all $(x,y) \in D$
3. hyperbolic for all $(x,y) \in D^c$
4. parabolic for all $(x,y) \in D$

44. अवकल समीकरण $(x-1)y'' + xy' + \frac{1}{x}y = 0$ पर विचारें। तो

1. $x = 1$ एकमात्र विचित्रता बिंदु है।
2. $x = 0$ एकमात्र विचित्रता बिंदु है।
3. $x = 0$ तथा $x = 1$ दोनों विचित्रता बिंदु हैं।
4. न तो $x = 0$, न $x = 1$ विचित्रता बिंदु है।

44. Consider the differential equation $(x-1)y'' + xy' + \frac{1}{x}y = 0$.
Then
1. $x = 1$ is the only singular point
2. $x = 0$ is the only singular point
3. both $x = 0$ and $x = 1$ are singular points
4. neither $x = 0$ nor $x = 1$ are singular points

45. उसके अपने गुरुत्व केन्द्र से गुजरता एक अक्ष m के गिर्द एक ठोस समचतुष्फलक के जड़त्व आघूर्ण को माने कि $I(m)$ निर्दिष्ट करता है। निम्न में से कौन-सा सही है?
1. यदि अक्ष ℓ शीर्ष से गुजरता है तथा अक्ष ℓ' शीर्ष से नहीं गुजरता तो $I(\ell) > I(\ell')$ है।
2. यदि अक्ष ℓ एक किनारे के मध्यबिंदु से गुजरता है तथा ℓ' कोई अन्य अक्ष है तो $I(\ell) > I(\ell')$ है।
3. सभी अक्षों ℓ के लिए $I(\ell)$ समान है।
4. यदि अक्ष ℓ शीर्ष से गुजरता है तथा अक्ष ℓ' शीर्ष से नहीं गुजरता तो $I(\ell) < I(\ell')$ है।

45. Let $I(m)$ denote the moment of inertia of a regular solid tetrahedron about an axis m passing through its centre of gravity. Which of the following is true?
1. if the axis ℓ passes through a vertex and the axis ℓ' does not pass through a vertex then $I(\ell) > I(\ell')$
2. if the axis ℓ passes through the mid-point of an edge and ℓ' is any other axis then $I(\ell) > I(\ell')$
3. $I(\ell)$ is the same for all axes ℓ
4. if the axis ℓ passes through a vertex and the axis ℓ' does not pass through a vertex then $I(\ell) < I(\ell')$

46. मानें कि एक आयत $[0,\pi] \times [0,T]$ में ऊष्मा समीकरण $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, सीमा प्रतिबंध $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$ तथा प्रारंभिक प्रतिबंध $u(x,0) = \varphi(x)$ के अधीन, $0 \le x \le \pi$, का एक हल $u(x,\ t)$ है। यदि $f(x) = u(x,T)$, तो एक उपयुक्त आष्टि $k(x,y)$ के लिये निम्न में से कौन-सा सही है?
1. $\int_0^{\pi} k(x,y)\,\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$
2. $\varphi(x) + \int_0^{\pi} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$
3. $\int_0^{x} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$
4. $\varphi(x) + \int_0^{x} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$

46. Let $u(x,\ t)$ be a solution of the heat equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in a rectangle $[0,\pi] \times [0,T]$ subject to the boundary conditions $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$ and the initial condition $u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi$. If $f(x) = u(x,T)$, then which of the following is true for a suitable kernel $k(x,y)$?
1. $\int_0^{\pi} k(x,y)\,\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$
2. $\varphi(x) + \int_0^{\pi} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$
3. $\int_0^{x} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$
4. $\varphi(x) + \int_0^{x} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$

47. मानें कि $X = \{u \in C^1[0,1] \,|\, u(0) = u(1) = 0\}$ तथा $J: X \to \mathbb{R}$ को परिभाषित करें कि $J(u) = \int_0^1 e^{-u'(x)^2}dx$. तो
1. J अपने निम्नक पर नहीं पहुंचता।
2. एक अद्‌वितीय $u \in X$ पर J अपने निम्नक पर पहुंचता है।
3. यथातथ दो अवयव $u \in X$ पर J अपने निम्नक पर पहुंचता है।
4. अपरिमितत: अनेक $u \in X$ पर J अपने निम्नक पर पहुंचता है।

47. Let $X = \{u \in C^1[0,1] \,|\, u(0) = u(1) = 0\}$ and define $J: X \to \mathbb{R}$ by
$J(u) = \int_0^1 e^{-u'(x)^2}dx$.
Then
1. J does not attain its infimum
2. J attains its infimum at a unique $u \in X$
3. J attains its infimum at exactly two elements $u \in X$
4. J attains its infimum at infinitely many $u \in X$

48. $x^2 - x - 2 = 0$ के हल के लिए पुनरावृत्तिमूलक विधि $x_{n+1} = g(x_n)$ मूल $x = 2$ के सामीप्य में द्विधा अभिसरित होती है यदि $g(x)$ इस समान है:

1. $x^2 - 2$
2. $(x-2)^2 - 6$
3. $1 + \frac{2}{x}$
4. $\frac{x^2+2}{2x-1}$

48. The iterative method $x_{n+1} = g(x_n)$ for the solution of $x^2 - x - 2 = 0$ converges quadratically in a neighbourhood of the root $x = 2$ if $g(x)$ equals

1. $x^2 - 2$
2. $(x-2)^2 - 6$
3. $1 + \frac{2}{x}$
4. $\frac{x^2+2}{2x-1}$

UNIT 4

49. मानें कि X आमाप 1 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है कोशि बंटन से, जिसकी प्रायिकता घनत्व फलन है $f_\theta(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+(x-\theta)^2}\right), -\infty < x < \infty,$ जहां $\theta \in (-\infty, \infty)$ है। $H_0: \theta = -1$ बनाम $H_1: \theta = 0$ के परीक्षण के लिए, निम्न परीक्षण प्रस्तावित किया जाता है।

यदि $\frac{X}{\sqrt{1+X^2}} > C$ है तो H_0 को अस्वीकार करें, अन्यथा H_0 को अस्वीकार न करें। C का मान क्या है ताकि परीक्षण की शक्ति 0.5 है?

1. $\frac{\pi}{4}$
2. 0
3. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
4. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{C}{1-C}} = \frac{\pi}{3}$ का एक हल

49. Let X be a random sample of size 1 from a Cauchy distribution with probability density function

$f_\theta(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+(x-\theta)^2}\right), -\infty < x < \infty,$

where $\theta \in (-\infty, \infty)$. For testing $H_0: \theta = -1$ against $H_1: \theta = 0$, the following test is suggested.

Reject H_0 if $\frac{X}{\sqrt{1+X^2}} > C$, otherwise do not reject H_0.

What is the value of C so that the power of the test is 0.5?

1. $\frac{\pi}{4}$
2. 0
3. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
4. a solution of $\tan^{-1}\sqrt{\frac{C}{1-C}} = \frac{\pi}{3}$

50. मानें कि X_1 तथा X_2 आमाप 2 का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, बंटन जिसकी प्रायिकता घनत्व फलन $f_\theta(x) = \theta\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} + (1-\theta)\frac{1}{2}e^{-|x|},$ $-\infty < x < \infty,$ से निकाला गया है और $\theta \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ । यदि X_1 तथा X_2 के प्रेक्षित मान क्रमश: 0 तथा 2 हैं, तो θ का उच्चतम संभाव्यता आकल है।

1. 0
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. अद्वितीय नहीं

50. Let X_1 and X_2 be a random sample of size two from a distribution with probability density function

$f_\theta(x) = \theta\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} + (1-\theta)\frac{1}{2}e^{-|x|},$

$-\infty < x < \infty,$

where $\theta \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. If the observed values of X_1 and X_2 are 0 and 2, respectively, then the maximum likelihood estimate of θ is

1. 0
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. not unique

51. X, Y स्वतंत्र चरघातांकी यादृच्छिक चर हैं माध्य क्रमश: 4 तथा 5 के साथ। निम्न कथनों में से कौन-सा सही है?

1. $X + Y$ चरघातांकी है, माध्य 9 के साथ।
2. $X\,Y$ चरघातांकी है, माध्य 20 के साथ।
3. उच्च (X, Y) चरघातांकी है।
4. न्यून (X, Y) चरघातांकी है।

51. X, Y are independent exponential random variables with means 4 and 5, respectively. Which of the following statements is true?

1. $X + Y$ is exponential with mean 9
2. $X\,Y$ is exponential with mean 20
3. max (X, Y) is exponential
4. min (X, Y) is exponential

52. अवस्था समष्टि $\{1,2,3\}$ तथा संक्रमण आव्यूह $P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ युक्त मॉर्कोव शंखला $\{X_n \mid n \geq 0\}$ पर विचारें।
तब $P(X_3 = 1 \mid X_0 = 1)$ इस समान है
1. 0 2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{8}$

52. Consider a Markov chain $\{X_n \mid n \geq 0\}$ with state space $\{1,2,3\}$ and transition matrix $P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$. Then $P(X_3 = 1 \mid X_0 = 1)$ equals
1. 0 2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{8}$

53. मानें कि $\psi(t) = e^{-|t|-\frac{t^2}{2}}$ तथा $\varphi(t) = \frac{e^{-|t|}+e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$ हैं। निम्न में से कौन-सा सही है?
1. ψ एक अभिलक्षणिक फलन है परंतु φ नहीं।
2. φ एक अभिलक्षणिक फलन है परंतु ψ नहीं।
3. ψ तथा φ दोनों अभिलक्षणिक फलन है।
4. न तो ψ, न φ अभिलक्षणिक फलन है।

53. Let $\psi(t) = e^{-|t|-\frac{t^2}{2}}$ and $\varphi(t) = \frac{e^{-|t|}+e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$. Which of the following is true?
1. ψ is a characteristic function but φ is not
2. φ is a characteristic function but ψ is not
3. both ψ and φ are characteristic functions
4. neither ψ nor φ is a characteristic function

54. पांच खाली बक्से हैं। यादृच्छिकत: चुने बक्सों में गेंद स्वतंत्रत: एक के बाद एक रखे जाते हैं। किसी निवेशित बक्से में चौथी गेंद के प्रथम रखे जाने की प्रायिकता इस समान है।
1. $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 2. $\left(\frac{3}{5}\right)^3$
3. $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 4. $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$

54. There are five empty boxes. Balls are placed independently one after another in randomly selected boxes. The probability that the fourth ball is the first to be placed in an occupied box equals
1. $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 2. $\left(\frac{3}{5}\right)^3$
3. $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 4. $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$

55. एक समांतर तंत्र में n सर्वथासमान घटक हैं। यदि घटकों का आयुकाल स्वतंत्र स्र्वथासमानत: बंटित एकसमान यादृच्छिक चर हैं, माध्य 30 घंटे तथा परिसर 60 घंटों का। यदि तंत्र का प्रत्याशित आयुकाल 50 घंटे हैं तो n का मान है:
1. 3 2. 4
3. 5 4. 6

55. A parallel system consists of n identical components. The lifetimes of the components are independent identically distributed uniform random variables with mean 30 hours and range 60 hours. If the expected lifetime of the system is 50 hours, then the value of n is
1. 3 2. 4
3. 5 4. 6

56. मानें कि X तथा Y स्वतंत्र चरघातांकी यादृच्छिक चर हैं। यदि $E[X] = 1$ तथा $E[Y] = \frac{1}{2}$ हैं, तो $P(X > 2Y|X > Y)$ है
1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{3}{4}$

56. Let X and Y be independent exponential random variables. If $E[X] = 1$ and $E[Y] = \frac{1}{2}$ then $P(X > 2Y|X > Y)$ is
1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{3}{4}$

57. यदि आमाप N की एक समाष्टि से हम आमाप n के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श को निकालते हैं, जहां $1 < n < N$ है, सरल यादृच्छिक प्रतिचयन, बिना प्रतिस्थापन योजना के प्रयोग से। किसी विशेष गुण रखती इकाईयों के समष्टि अनुपात को P मानें, तथा संगत प्रतिदर्श अनुपात को p मानें।

निम्न में से कौन-सा $P(1-P)$ के लिए एक अनभिनत आकलज है?

1. $p(1-p)$
2. $\frac{N-n}{N-1}p(1-p)$
3. $\frac{n(N-1)}{N(n-1)}p(1-p)$
4. $\frac{N(n-1)}{n(N-1)}p(1-p)$

57. Suppose we draw a random sample of size n from a population of size N, where $1 < n < N$, using simple random sampling without replacement scheme. Let P be the population proportion of units possessing a particular attribute and p be the corresponding sample proportion. Which of the following is an unbiased estimator for $P(1-P)$?

1. $p(1-p)$
2. $\frac{N-n}{N-1}p(1-p)$
3. $\frac{n(N-1)}{N(n-1)}p(1-p)$
4. $\frac{N(n-1)}{n(N-1)}p(1-p)$

58. मानें कि $X_1 \sim N_{p_1}(0,\Sigma_1)$, $X_2 \sim N_{p_2}(0,\Sigma_2)$, जहां X_1 तथा X_2 स्वतंत्रता बंटित है। यदि $p_1 > p_2$ तथा Σ_1, Σ_2 धनात्मक निश्चित हैं तो निम्न कथनों में से कौन-सा आवश्यकत: सही है?

1. $X_1^T\Sigma_1 X_1 + X_2^T\Sigma_2 X_2 \sim \chi^2_{p_1+p_2}$
2. $X_1^T\Sigma_1^{-1} X_1 + X_2^T\Sigma_2^{-1} X_2 \sim \chi^2_{p_1+p_2}$
3. $X_1^T\Sigma_1^{-1} X_1 - X_2^T\Sigma_2^{-1} X_2 \sim \chi^2_{p_1-p_2}$
4. $\frac{p_1 X_1^T\Sigma_1^{-1}X_1}{p_2 X_2^T\Sigma_2^{-1}X_2} \sim F_{p_1,p_2}$

58. Suppose $X_1 \sim N_{p_1}(0,\Sigma_1)$, $X_2 \sim N_{p_2}(0,\Sigma_2)$, where X_1 and X_2 are independently distributed. If $p_1 > p_2$ and Σ_1, Σ_2 are positive definite then which of the following statements is necessarily true?

1. $X_1^T\Sigma_1 X_1 + X_2^T\Sigma_2 X_2 \sim \chi^2_{p_1+p_2}$
2. $X_1^T\Sigma_1^{-1} X_1 + X_2^T\Sigma_2^{-1} X_2 \sim \chi^2_{p_1+p_2}$
3. $X_1^T\Sigma_1^{-1} X_1 - X_2^T\Sigma_2^{-1} X_2 \sim \chi^2_{p_1-p_2}$
4. $\frac{p_1 X_1^T\Sigma_1^{-1}X_1}{p_2 X_2^T\Sigma_2^{-1}X_2} \sim F_{p_1,p_2}$

59. निम्न समाश्रयण समस्या पर विचारें

$Y_i = \alpha + \beta i + \epsilon_i; \quad i = 1, \dots, n.$

यहां $\epsilon_i, i = 1, 2, \dots, n,$ स्वतंत्रत: सवर्थासमानत: बंटित प्रसामान्य $N(0,1)$ यादृच्छिक चर हैं। यह माना जाता है कि $\alpha \neq 0$ तथा β ज्ञात है। यदि α का उच्चतम संभाव्य आकलज $\hat{\alpha}_n$ है, तों निम्न कथनों में से कौन-सा सही है?

1. $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}_n) \neq \alpha$
2. $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}_n) = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\alpha}_n) = \infty$
4. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\alpha}_n) = 0$

59. Consider the following regression problem

$Y_i = \alpha + \beta i + \epsilon_i; \quad i = 1, \dots, n.$

Here $\epsilon_i, i = 1, 2, \dots, n,$ are i.i.d $N(0,1)$ random variables. It is assumed that $\alpha \neq 0$ and β is known. If $\hat{\alpha}_n$ is the MLE of α, which of the following statements is true?

1. $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}_n) \neq \alpha$
2. $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}_n) = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\alpha}_n) = \infty$
4. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\alpha}_n) = 0$

60. मानें कि $X_1, X_2, \dots$ एकसमान $(0, 3\theta), \theta > 0$ से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। परिभाषित करें कि $T_n = \frac{1}{3}\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. निम्न में से कौन-सा सही **नहीं** है?

1. θ के लिए T_n अविरोधी है।
2. θ के लिए T_n अनभिनत है।
3. T_n एक पर्याप्त प्रतिदर्शज है।
4. T_n संपूर्ण है।

60. Let $X_1, X_2, \dots$ be a random sample from uniform $(0, 3\theta), \theta > 0$. Define $T_n = \frac{1}{3}\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Which of the following is NOT true?

1. T_n is consistent for θ
2. T_n is unbiased for θ
3. T_n is a sufficient statistic
4. T_n is complete

भाग\PART C

UNIT-1

61. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ का मूल्यांकन करें।

1. $\frac{\pi}{2}$ 2. π
3. $\frac{\pi}{8}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

61. Evaluate $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.

1. $\frac{\pi}{2}$ 2. π
3. $\frac{\pi}{8}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

62. प्रायिक दूरीक के साथ $\mathbb{R}$ के उपसमष्टि के रूप में परिमेय संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{Q}$ पर विचारें। मानें कि a तथा b अपरिमेय संख्यायें हैं, $a < b$ के साथ तथा मानें कि $K = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. तो

1. $\mathbb{Q}$ का एक परिबद्ध उपसमुच्चय K है
2. $\mathbb{Q}$ का एक संवृत उपसमुच्चय K है
3. $\mathbb{Q}$ का एक संहत उपसमुच्चय K है
4. $\mathbb{Q}$ का एक विवृत उपसमुच्चय K है

62. Consider the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ as a subspace of $\mathbb{R}$ with the usual metric. Suppose a and b are irrational numbers with $a < b$ and let $K = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Then

1. K is a bounded subset of $\mathbb{Q}$
2. K is a closed subset of $\mathbb{Q}$
3. K is a compact subset of $\mathbb{Q}$
4. K is an open subset of $\mathbb{Q}$

63. मानें कि $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ को समाधान करता एक फलन है तथा $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ है। निम्न में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. f निरंतर वृद्धिमान है।
2. f या तो अचर या परिबद्ध है।
3. हर परिमेय $r \in \mathbb{Q}$ के लिए $f(rx) = f(x)^r$ है।
4. $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

63. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function satisfying $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ and $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Which of the following are necessarily true?

1. f is stricly increasing
2. f is either constant or bounded
3. $f(rx) = f(x)^r$ for every rational $r \in \mathbb{Q}$
4. $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

64. मानें कि $\mathbb{R}$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को निर्दिष्ट करता है तथा $\mathbb{Q}$ सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय को। $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$ के लिए मानें कि A_ϵ विवृत अंतराल $(0, 1-\epsilon)$ है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. $sup_{0<\epsilon\leq\frac{1}{2}} sup(A_\epsilon) < 1$
2. $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \frac{1}{2} \implies inf(A_{\epsilon_1}) < inf(A_{\epsilon_2})$
3. $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \frac{1}{2} \implies sup(A_{\epsilon_1}) > sup(A_{\epsilon_2})$
4. $\sup(A_\epsilon \cap \mathbb{Q}) = \sup(A_\epsilon \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$

64. Let $\mathbb{R}$ denote the set of real numbers and $\mathbb{Q}$ the set of all rational numbers. For $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$, let A_ϵ be the open interval $(0, 1-\epsilon)$. Which of the following are true?

1. $sup_{0<\epsilon\leq\frac{1}{2}} sup(A_\epsilon) < 1$
2. $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \frac{1}{2} \implies inf(A_{\epsilon_1}) < inf(A_{\epsilon_2})$
3. $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \frac{1}{2} \implies sup(A_{\epsilon_1}) > sup(A_{\epsilon_2})$
4. $\sup(A_\epsilon \cap \mathbb{Q}) = \sup(A_\epsilon \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$

65. मानें कि $a_{mn}, \ m \geq 1, \ n \geq 1$ वास्तविक संख्याआं का एक द्विव्यूह है। परिभाषित करें कि

$$P = \liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} a_{mn}, \quad Q = \liminf_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} a_{mn}$$

$$R = \limsup_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} a_{mn}, \quad S = \limsup_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} a_{mn}$$

निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. $P \leq Q$ 2. $Q \leq R$
3. $R \leq S$ 4. $P \leq S$

65. Let $a_{mn}, \ m \geq 1, \ n \geq 1$ be a double array of real numbers. Define

$$P = \liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} a_{mn}, \quad Q = \liminf_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} a_{mn}$$

$$R = \limsup_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} a_{mn}, \quad S = \limsup_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} a_{mn}$$

Which of the following statements are necessarily true?

1. $P \leq Q$ 2. $Q \leq R$
3. $R \leq S$ 4. $P \leq S$

66. निम्न में से कौन-सा अभिसारी हैं?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} 2^n$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log (1+1/n)}$

66. Which of the following are convergent?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} 2^n$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log (1+1/n)}$

67. मानें कि A एक $m \times n$ आव्यूह है जाति r का। यदि रैखिक तंत्र $AX = b$ का प्रत्येक $b \in \mathbb{R}^m$ के लिए हल है, तो

1. $m = r$
2. A की स्तंभ समष्टि $\mathbb{R}^m$ की एक उचित उपसमष्टि है।
3. जभी भी $m = n$ है, A की शून्य समष्टि $\mathbb{R}^n$ की एक अतुच्छ उपसमष्टि है।
4. $m \geq n$, $m = n$ का संकेत देता है।

67. Let A be an $m \times n$ matrix with rank r. If the linear system $AX = b$ has a solution for each $b \in \mathbb{R}^m$, then

1. $m = r$
2. the column space of A is a proper subspace of $\mathbb{R}^m$
3. the null space of A is a non-trivial subspace of $\mathbb{R}^n$ whenever $m = n$
4. $m \geq n$ implies $m = n$

68. मानें कि
$\ell^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$
वर्ग संकलनीय अनुक्रमों की हिल्बर्ट समष्टि है तथा मानें कि e_k , k^{th} निर्देशांक सदिश को निर्दिष्ट करता है (k^{th} समष्टि में 1 और अन्य सभी जगह 0 के साथ)। निम्न उपसमुच्चयों में से कौन-सा ℓ^2 में सघन **नहीं** है?

1. $\text{span}\{e_1 - e_2,\ e_2 - e_3, e_3 - e_4, \ldots\}$
2. $\text{span}\{2e_1 - e_2,\ 2e_2 - e_3,\ 2e_3 - e_4, \ldots\}$
3. $\text{span}\{e_1 - 2e_2,\ e_2 - 2e_3,\ e_3 - 2e_4, \ldots\}$
4. $\text{span}\{e_2,\ e_3,\ e_4, \ldots\}$

68. Let
$\ell^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$
be the Hilbert space of square summable sequences and let e_k denote the k^{th} co-ordinate vector (with 1 in k^{th} place, 0 elsewhere). Which of the following subspaces is NOT dense in ℓ^2?

1. $\text{span}\{e_1 - e_2,\ e_2 - e_3, e_3 - e_4, \ldots\}$
2. $\text{span}\{2e_1 - e_2,\ 2e_2 - e_3,\ 2e_3 - e_4, \ldots\}$
3. $\text{span}\{e_1 - 2e_2,\ e_2 - 2e_3,\ e_3 - 2e_4, \ldots\}$
4. $\text{span}\{e_2,\ e_3,\ e_4, \ldots\}$

69. मानें कि $X = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \middle| 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) | -1 \leq y \leq 1\}$, $\mathbb{R}^2$ की एक उपसमष्टि है तथा $Y = [0, 1)$, $\mathbb{R}$ की एक उपसमष्टि है। तो

1. X संबद्ध है।
2. X संहत है।
3. $X \times Y$ (गुणन सांस्थितिकी में) संबद्ध है।
4. $X \times Y$ (गुणन सांस्थितिकी में) संहत है।

69. Consider $X = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \middle| 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y) | -1 \leq y \leq 1\}$ as a subspace of $\mathbb{R}^2$ and $Y = [0, 1)$ as a subspace of $\mathbb{R}$. Then

1. X is connected
2. X is compact
3. $X \times Y$ (in product topology) is connected
4. $X \times Y$ (in product topology) is compact

70. मानें कि $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ एक संतत: अवकलनीय मानचित्र है, $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$, सभी $x, y \in \mathbb{R}^n$ को समाधान करने वाला। तो

1. f आच्छादी है।
2. $\mathbb{R}^n$ का एक संवृत उपसमुच्चय $f(\mathbb{R}^n)$ है।
3. $\mathbb{R}^n$ का एक विवृत उपसमुच्चय $f(\mathbb{R}^n)$ है।
4. $f(0) = 0$

70. Let $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a continuously differentiable map satisfying $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$, for all $x, y \in \mathbb{R}^n$. Then
1. f is onto
2. $f(\mathbb{R}^n)$ is a closed subset of $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbb{R}^n)$ is an open subset of $\mathbb{R}^n$
4. $f(0) = 0$

71. मानें कि $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ पर $f(x) = x^t Ax$ परिभाषित है, जहां A वास्वविक प्रविष्टियों का एक 4×4 आव्यूह है, तथा x के परिवर्त को x^t निर्दिष्ट करता है। एक बिंदु x_0 पर f की प्रवणता आवश्यकत: है
1. $2Ax_0$
2. $Ax_0 + A^t x_0$
3. $2A^t x_0$
4. Ax_0

71. Let $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = x^t Ax$, where A is a 4×4 matrix with real entries and x^t denotes the transpose of x. The gradient of f at a point x_0 necessarily is
1. $2Ax_0$
2. $Ax_0 + A^t x_0$
3. $2A^t x_0$
4. Ax_0

72. मानें कि

$f(x,y) = \frac{1-\cos(x+y)}{x^2+y^2}$ यदि $(x,y) \neq (0,0)$

$f(0,0) = \frac{1}{2}$

तथा $g(x,y) = \frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$ यदि $x + y \neq 0$

$g(x,y) = \frac{1}{2}$ यदि $x + y = 0$

तो
1. $(0,0)$ पर f संतत है।
2. $(0,0)$ को छोड़कर सभी जगह f संतत है।
3. $(0,0)$ पर g संतत है।
4. g सर्वत्र संतत है।

72. Let $f(x,y) = \frac{1-\cos(x+y)}{x^2+y^2}$ if $(x,y) \neq (0,0)$

$f(0,0) = \frac{1}{2}$

and $g(x,y) = \frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$ if $x + y \neq 0$

$g(x,y) = \frac{1}{2}$ if $x + y = 0$

Then
1. f is continuous at $(0,0)$
2. f is continuous everywhere except at $(0,0)$
3. g is continuous at $(0,0)$
4. g is continuous everywhere

73. मानें कि A एक $m \times n$ आव्यूह है जाति m का, $n > m$ के साथ। यदि कुछ शून्येतर वास्तविक संख्या α के लिए, हम पाते हैं कि $x^t AA^t x = \alpha\, x^t x$, सभी $x \in \mathbb{R}^m$ के लिए, तो $A^t A$
1. के याथतथ दो भिन्न अभिलक्षणिक मान हैं।
2. का एक अभिलक्षणिक मान 0 है, बहुकता $n - m$ के साथ।
3. का एक शून्येतर अभिलक्षणिक मान α है।
4. के यथातथ दो शून्येतर भिन्न अभिलक्षणिक मान हैं।

73. Let A be an $m \times n$ matrix of rank m with $n > m$. If for some non-zero real number α, we have $x^t AA^t x = \alpha\, x^t x$, for all $x \in \mathbb{R}^m$ then $A^t A$ has
1. exactly two distinct eigenvalues
2. 0 as an eigenvalue with multiplicity $n - m$
3. α as a non-zero eigenvalue
4. exactly two non-zero distinct eigenvalues

74. प्रत्येक 4×4 वास्तविक सममित व्युत्करणीय आव्यूह A के लिए, एक ऐसे धन पूर्णांक p का अस्तित्व है ताकि
1. $pI + A$ धनात्मक निश्चित है।
2. A^p धनात्मक निश्चित है।
3. A^{-p} धनात्मक निश्चित है।
4. $\exp(pA) - I$ धनात्मक निश्चित है।

74. For every 4×4 real symmetric non-singular matrix A, there exists a positive integer p such that
1. $pI + A$ is positive definite
2. A^p is positive definite
3. A^{-p} is positive definite
4. $\exp(pA) - I$ is positive definite

75. चर X में, अधिक से अधिक 3 घात तक के सभी बहुपदों की $\mathbb{C}$ पर सदिश समष्टि V को मानें। मानें कि $D:V \to V$, X के संदर्भ में अवकलन द्वारा दिया गया रैखिक संकारक है। V के लिए कुछ आधार के संदर्भ में माने कि D का A आव्यूह है। निम्न में से कौन-से सही हैं?
1. A एक शून्यंभावी आव्यूह है।
2. A एक विकर्णनीय आव्यूह है।

3. A की जाति 2 है।
4. A का जोर्डान विहित रूप है $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

75. Let V be the vector space over $\mathbb{C}$ of all polynomials in a variable X of degree at most 3. Let $D: V \to V$ be the linear operator given by differentiation with respect to X. Let A be the matrix of D with respect to some basis for V. Which of the following are true?
1. A is a nilpotent matrix
2. A is a diagonalizable matrix
3. the rank of A is 2
4. the Jordan canonical form of A is $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

76. मानें कि वास्तविक प्रविष्टियों के साथ A एक 3×3 आव्यूह है। सही कथनों को पहचानें:
1. $\mathbb{R}$ पर A आवश्यकत: विकर्णनीय है।
2. यदि A के भिन्न वास्तविक अभिलक्षणिक मान हैं तो वह $\mathbb{R}$ पर विकर्णनीय है।
3. यदि A के भिन्न अभिलक्षणिक मान हैं तो वह $\mathbb{C}$ पर विकर्णनीय है।
4. यदि A के सभी अभिलक्षणिक मान शून्येतर हैं तो वह $\mathbb{C}$ पर विकर्णनीय है।

76. Let A be a 3×3 matrix with real entries. Identify the correct statements.
1. A is necessarily diagonalizable over $\mathbb{R}$
2. if A has distinct real eigenvalues then it is diagonalizable over $\mathbb{R}$
3. if A has distinct eigenvalues then it is diagonalizable over $\mathbb{C}$
4. if all eigenvalues of A are non-zero then it is diagonalizable over $\mathbb{C}$

77. मानें कि $M = \{A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ तथा A के अभिलक्षणिक मान $\mathbb{Q}$ में हैं$\}$. तो
1. M रिक्त है।
2. $M = \{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$
3. यदि $A \in M$ तो A के अभिलक्षणिक मान $\mathbb{Z}$ में हैं।
4. यदि $A, B \in M$ ऐसे हैं कि $AB = I$, तो सारणिक $A \in \{+1, -1\}$

77. Let $M = \{A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ and the eigenvalues of A are in $\mathbb{Q}\}$. Then
1. M is empty
2. $M = \{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$
3. if $A \in M$ then the eigenvalues of A are in $\mathbb{Z}$
4. if $A, B \in M$ are such that $AB = I$ then $\det A \in \{+1, -1\}$

78. मानें कि $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ एक फलन है जो
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$
से दिया जाता है। तो
1. $[-1,1]$ पर f का विचरण परिबद्ध है।
2. $[-1,1]$ पर f' का विचरण परिबद्ध है।
3. $|f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1,1]$
4. $|f'(x)| \leq 3 \quad \forall x \in [-1,1]$

78. Let $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ be a function given by
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$
Then
1. f is of bounded variation on $[-1,1]$
2. f' is of bounded variation on $[-1,1]$
3. $|f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1,1]$
4. $|f'(x)| \leq 3 \quad \forall x \in [-1,1]$

UNIT-2

79. मानें कि G एक परिमित आबेली समूह है तथा $a, b \in G$ कोटि$(a) = m$ तथा कोटी $(b) = n$ के साथ। निम्न में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?
1. कोटि$(ab) = mn$
2. कोटि$(ab) =$ लघुत्तम समापवर्त्य (m,n)
3. G का एक अवयव है जिसकी कोटि लघुत्तम समापवर्त्य (m,n) है।
4. कोटि$(ab) =$ महत्व समाविभाजक(m,n) है।

79. Let G be a finite abelian group and $a, b \in G$ with order$(a) = m$, order$(b) = n$. Which of the following are necessarily true?
1. order$(ab) = mn$
2. order$(ab) =$ lcm(m, n)
3. there is an element of G whose order is lcm(m, n)
4. order$(ab) =$ gcd(m, n)

80. एक समुच्चय X के लिए, मानें कि X के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय $\mathcal{P}(X)$ है, तथा सभी फलनों $f: X \to \{0, 1\}$ का समुच्चय $\Omega(X)$ है, तो
1. यदि X परिमित है तो $\mathcal{P}(X)$ परिमित है।
2. यदि X तथा Y परिमित समुच्चय हैं तथा यदि $\mathcal{P}(X)$ तथा $\mathcal{P}(Y)$ के बीच एक 1-1 संगति है, तो X तथा Y के बीच एक 1-1 संगति है।
3. X तथा $\mathcal{P}(X)$ के बीच एक 1-1 संगति नहीं है।
4. Ω(X) तथा $\mathcal{P}(X)$ के बीच एक 1-1 संगति है।

80. For a set X, let $\mathcal{P}(X)$ be the set of all subsets of X and let $\Omega(X)$ be the set of all functions $f: X \to \{0, 1\}$. Then
1. if X is finite then $\mathcal{P}(X)$ is finite
2. if X and Y are finite sets and if there is a 1-1 correspondence between $\mathcal{P}(X)$ and $\mathcal{P}(Y)$, then there is a 1-1 correspondence between X and Y
3. there is no 1-1 correspondence between X and $\mathcal{P}(X)$
4. there is a 1-1 correspondence between Ω(X) and $\mathcal{P}(X)$

81. मानें कि f एक अचरेतर सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है तथा मानें कि f का बिंब E है। तो
1. E एक विवृत समुच्चय है।
2. $E \cap \{z : |z| < 1\}$ रिक्त है।
3. $E \cap \mathbb{R}$ अरिक्त है।
4. E एक परिबद्ध समुच्चय है।

81. Let f be a non-constant entire function and let E be the image of f. Then
1. E is an open set
2. $E \cap \{z : |z| < 1\}$ is empty
3. $E \cap \mathbb{R}$ is non-empty
4. E is a bounded set

82. मानें कि $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ है, जहां $a_0, \ldots, a_{n-1}$ सम्मिश्र संख्यायें हैं तथा मानें कि $q(z) = 1 + a_{n-1}z + \cdots + a_0 z^n$. यदि $|z| \le 1$ के साथ के सभी z के लिए $|p(z)| \le 1$ है, तो
1. $|q(z)| \le 1$, $|z| \le 1$ के साथ के सभी z के लिए
2. $q(z)$ एक अचर बहुपद है।
3. $p(z) = z^n$ सभी सम्मिश्र संख्याओं z के लिए
4. $p(z)$ एक अचर बहुपद है।

82. Let $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, where $a_0, \ldots, a_{n-1}$ are complex numbers and let $q(z) = 1 + a_{n-1}z + \cdots + a_0 z^n$. If $|p(z)| \le 1$ for all z with $|z| \le 1$ then
1. $|q(z)| \le 1$ for all z with $|z| \le 1$
2. $q(z)$ is a constant polynomial
3. $p(z) = z^n$ for all complex numbers z
4. $p(z)$ is a constant polynomial

83. मानें कि $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ एक होलोमार्फिक फलन है तथा f का वास्तविक भाग u है तथा f का अधिकल्पित भाग v है। तो $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए $|f'(x + iy)|^2$ इस समान है
1. $u_x^2 + u_y^2$
2. $u_x^2 + v_x^2$
3. $v_y^2 + u_y^2$
4. $v_y^2 + v_x^2$

83. Let $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be a holomorphic function and let u be the real part of f and v the imaginary part of f. Then, for $x, y \in \mathbb{R}$, $|f'(x + iy)|^2$ is equal to
1. $u_x^2 + u_y^2$
2. $u_x^2 + v_x^2$
3. $v_y^2 + u_y^2$
4. $v_y^2 + v_x^2$

84. मानें कि f एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है। $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) = 0$ कुछ धन पूर्णांक n के लिए$\}$ पर विचारें। तो
1. यदि $A = \mathbb{C}$ है, तो f एक बहुपद है।
2. यदि $A = \mathbb{C}$ है, तो f एक अचर फलन है।
3. यदि A अगणनीय है, तो एक f एक बहुपद है।
4. यदि A अगणनीय है, तो एक f एक अचर फलन है।

84. Let f be an entire function. Consider $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) = 0$ for some positive integer $n\}$. Then
1. if $A = \mathbb{C}$, then f is a polynomial
2. if $A = \mathbb{C}$, then f is a constant function

3. if A is uncountable, then f is a polynomial
4. if A is uncountable, then f is a constant function

85. मानें कि X तथा Y सांस्थितिकीय समष्टियां हैं जहां Y हाउसडार्फ़ है। मानें कि $X \times Y$ दी गयी गुणन सांस्थितिकी है। तो एक फलन $f: X \to Y$ के लिए निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. यदि f संतत है, तो आलेख$(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ $X \times Y$ में सवृत है।
2. यदि आलेख(f) $X \times Y$ में संवृत है, तो f संतत है।
3. यदि आलेख(f) $X \times Y$ में संवृत है। तो यह आवश्यक नहीं है कि f संतत हो।
4. यदि Y परिमित है, तो f संतत है।

85. Let X and Y be topological spaces where Y is Hausdorff. Let $X \times Y$ be given the product topology. Then for a function $f: X \to Y$ which of the following statements are necessarily true?

1. if f is continuous, then graph$(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ is closed in $X \times Y$
2. if graph(f) is closed in $X \times Y$, then f is continuous
3. if graph(f) is closed in $X \times Y$, then f need not be continuous
4. if Y is finite, then f is continuous

86. अरिक्त समुच्चय X पर मानें कि d तथा d' दूरीक हैं। तो निम्न में से कौन-से X पर दूरीक हैं?

1. सभी $x, y \in X$ के लिए, $\rho_1(x, y) = d(x, y) + d'(x, y)$
2. सभी $x, y \in X$ के लिए, $\rho_2(x, y) = d(x, y)d'(x, y)$
3. सभी $x, y \in X$ के लिए, $\rho_3(x, y) = \max\{d(x, y), d'(x, y)\}$
4. सभी $x, y \in X$ के लिए, $\rho_4(x, y) = \min\{d(x, y), d'(x, y)\}$

86. Let d and d' be metrics on a non-empty set X. Then which of the following are metrics on X?

1. $\rho_1(x, y) = d(x, y) + d'(x, y)$ for all $x, y \in X$
2. $\rho_2(x, y) = d(x, y)d'(x, y)$ for all $x, y \in X$
3. $\rho_3(x, y) = \max\{d(x, y), d'(x, y)\}$ for all $x, y \in X$
4. $\rho_4(x, y) = \min\{d(x, y), d'(x, y)\}$ for all $x, y \in X$

87. मानें कि F एक परिमित क्षेत्र है तथा मानें कि K/F एक क्षेत्र विस्तरण है घात 6 का। तो K/F का गाल्वा समूह इसकी तुल्याकारी है:

1. कोटि 6 का चक्रिक समूह
2. $\{1, 2, 3\}$ क्रमयचण समूह
3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ पर क्रमयचण समूह
4. $\{1\}$ पर क्रमयचण समूह

87. Let F be a finite field and let K/F be a field extension of degree 6. Then the Galois group of K/F is isomorphic to

1. the cyclic group of order 6
2. the permutation group on $\{1, 2, 3\}$
3. the permutation group on $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. the permutation group on $\{1\}$

88. मानें कि $z = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ तथा मानें कि $\theta = z + z^2 + z^4$ है, तो

1. $\theta \in \mathbb{Q}$
2. $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ कुछ $D > 0$ के लिए
3. $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ कुछ $D < 0$ के लिए
4. $\theta \in i\mathbb{R}$

88. Let $z = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ and let $\theta = z + z^2 + z^4$. Then

1. $\theta \in \mathbb{Q}$
2. $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ for some $D > 0$
3. $\theta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ for some $D < 0$
4. $\theta \in i\mathbb{R}$

89. किसी भी अभाज्य संख्या p के लिए मानें कि A_p पूर्णांकों का समुच्चय $d \in \{1, 2, \ldots, 999\}$ है ताकि d के अभाज्य गुणनखंडन में p का घात विषम है। तो गुणनसांख्यिकी

1. A_3 की 250
2. A_5 की 160
3. A_7 की 124
4. A_{11} की 82

89. For any prime number p, let A_p be the set of integers $d \in \{1, 2, \ldots, 999\}$ such that the power of p in the prime factorisation of d is odd. Then the cardinality of
1. A_3 is 250
2. A_5 is 160
3. A_7 is 124
4. A_{11} is 82

90. निम्न वलयों में से कौन-से मुख्य गुणजावली प्रांत है?
1. $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2+1\rangle$
2. $\mathbb{Z}[X]$
3. $\mathbb{C}[X, Y]$
4. $\mathbb{R}[X, Y]/\langle X^2+1, Y\rangle$

90. Which of the following rings are principal ideal domains (PIDs)?
1. $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2+1\rangle$
2. $\mathbb{Z}[X]$
3. $\mathbb{C}[X, Y]$
4. $\mathbb{R}[X, Y]/\langle X^2+1, Y\rangle$

Unit-3

91. रैखिक तंत्र $Ax = b$ पर विचारें,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

के साथ। मानें कि x_n n^{th} गाउस-सीडेल पुनरावृत्ति को निर्दिष्ट करता है तथा $e_n = x_n - x$. मानें कि M संगत आव्यूह है ताकि $e_{n+1} = Me_n$, $n \geq 0$. निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकत: सच हैं?
1. M के सभी अभिलक्षणी मानों का 1 से कम निरपेक्ष मान है।
2. M का एक ऐसे अभिलक्षणी मान है जिसका निरपेक्ष मान कम से कम 1 है।
3. सभी $b \in \mathbb{R}^3$ तथा किसी भी e_0 के लिए e_n , 0 पर अभिसरित होता है जैसे $n \to \infty$
4. किसी भी $b \in \mathbb{R}^3$ के लिए e_n, 0 पर अभिसरित नहीं होता जैसे $n \to \infty$, जब तक $e_0 = 0$ न हो।

91. Consider the linear system $Ax = b$ with

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Let x_n denote the n^{th} Gauss-Seidel iteration and $e_n = x_n - x$. Let M be the corresponding matrix such that $e_{n+1} = Me_n$, $n \geq 0$. Which of the following statements are necessarily true?
1. all eigenvalues of M have absolute value less than 1
2. there is an eigenvalue of M with absolute value at least 1
3. e_n converges to 0 as $n \to \infty$ for all $b \in \mathbb{R}^3$ and any e_0
4. e_n does not converge to 0 as $n \to \infty$ for any $b \in \mathbb{R}^3$ unless $e_0 = 0$

92. द्वितीय कोटि की आं.अ.स.

$$8\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

पर विचारें। तो निम्न में से कौन-से सही हैं?
1. समीकरण दीर्घवृत्तीय है।
2. समीकरण अतिपरविलयिक है।
3. स्वेच्छ अवकलनीय फलनों f तथा g के लिए व्यापक हल है $z = f\left(y - \frac{x}{2}\right) + g\left(y + \frac{3x}{4}\right)$
4. स्वेच्छ अवकलनीय फलनों f तथा g के लिए व्यापक हल है $z = f\left(y + \frac{x}{2}\right) + g\left(y - \frac{3x}{4}\right)$

92. Consider the second order PDE

$$8\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Then which of the following are correct?
1. the equation is elliptic
2. the equation is hyperbolic
3. the general solution is $z = f\left(y - \frac{x}{2}\right) + g\left(y + \frac{3x}{4}\right)$, for arbitrary differentiable functions f and g
4. the general solution is $z = f\left(y + \frac{x}{2}\right) + g\left(y - \frac{3x}{4}\right)$, for arbitrary differentiable functions f and g

93. लग्रांज समीकरण $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)z$ पर विचारें। दिये गये समीकरण का व्यापक हल है
1. $F\left(\frac{xy}{z}, \frac{x-y}{z}\right) = 0$ किसी स्वेच्छ अवकलनीय फलन F के लिए।
2. $F\left(\frac{x-y}{z}, \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0$ किसी स्वेच्छ अवकलनीय फलन F के लिए।

3. $z = f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ किसी स्वेच्छ अवकलनीय फलन f के लिए।
4. $z = xy\, f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ किसी स्वेच्छ अवकलनीय फलन f के लिए।

93. Consider the Lagrange equation $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)z$. Then the general solution of the given equation is

1. $F\left(\frac{xy}{z}, \frac{x-y}{z}\right) = 0$ for an arbitrary differentiable function F
2. $F\left(\frac{x-y}{z}, \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0$ for an arbitrary differentiable function F
3. $z = f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ for an arbitrary differentiable function f
4. $z = xy\, f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ for an arbitrary differentiable function f

94. सीमा प्रतिबंधों $y(0) = y(1) = y'(1)$ युक्त एक सीमा मान समस्या (सी मा स) $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ पर विचारें, जहां $[0,1]$ पर f एक वास्तविक संतत फलन है। तो निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. प्रत्येक f के लिए दी गयी सी मा स का एक अद्‌वितीय हल है।
2. कुछ f के लिए दी गयी सी मा स का कोई अद्‌वितीय हल नही है।
3. दी गयी सी मा स का हल है $y(x) = \int_0^x x\, t\, f(t)dt + \int_x^1 (t - x + xt)f(t)dt$
4. दी गयी सी मा स का हल है $y(x) = \int_0^x (x - t + xt)f(t)dt + \int_x^1 xtf(t)dt$

94. Consider a boundary value problem (BVP) $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ with boundary conditions $y(0) = y(1) = y'(1)$, where f is a real-valued continuous function on $[0,1]$. Then which of the following are true?

1. the given BVP has a unique solution for every f
2. the given BVP does not have a unique solution for some f
3. $y(x) = \int_0^x x\, t\, f(t)dt + \int_x^1 (t - x + xt)f(t)dt$ is a solution of the given BVP
4. $y(x) = \int_0^x (x - t + xt)f(t)dt + \int_x^1 xtf(t)dt$ is a solution of the given BVP

95. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\, \frac{dy}{dx} - y = 0$ पर विचारें, जो $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ पर परिभाषित है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. $y(0) = y'(0) = 1$ तथा $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)$ के साथ याथातथ एक हल $y = y(x)$ है।
2. $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ तथा $y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)$ के साथ याथातथ एक हल $y = y(x)$ है।
3. कोई भी हल $y = y(x),\ y''(0) = y(0)$ का समाधान करता है।
4. यदि y_1 तथा y_2 दो हल हैं तो कुछ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ के लिए $(ax + b)y_1 = (cx + d)y_2$ है।

95. Consider the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\, \frac{dy}{dx} - y = 0$ defined on $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Which among the following are true?

1. there is exactly one solution $y = y(x)$ with $y(0) = y'(0) = 1$ and $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)$
2. there is exactly one solution $y = y(x)$ with $y(0) = 1, y'(0) = -1$ and $y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)$
3. any solution $y = y(x)$ satisfies $y''(0) = y(0)$
4. if y_1 and y_2 are any two solutions then $(ax + b)y_1 = (cx + d)y_2$ for some $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

96. प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों के एक तंत्र के बारे में विचारें: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) + y(t) \\ -y(t) \end{bmatrix}$ हल समष्टि की विस्तृति इससे की जाती है:

1. $\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} \cosh t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2\, e^{-t} \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} \sinh t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{t}} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

96. Consider a system of first order differential equations

$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x(t)+y(t)\\-y(t)\end{bmatrix}$

The solution space is spanned by

1. $\begin{bmatrix}0\\e^{-t}\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}e^{t}\\0\end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix}e^{t}\\0\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}\cosh t\\e^{-t}\end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix}e^{-t}\\-2\,e^{-t}\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}\sinh t\\e^{-t}\end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix}e^{t}\\0\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{t}}-\frac{1}{2}e^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix}$

97. मानें कि $B=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2<1\}$, तथा मानें कि $C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)=\{u\in C^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)\mid u(x_1,x_2)=(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in \partial B \text{ के लिए}\}$.
मानें कि $u=(u_1,u_2)$ तथा परिभाषित करें कि $J: C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$

$$J(u)=\int_B\left(\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2$$

द्वारा। तो

1. न्यूनक $\{J(u): u\in C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)\}=0$
2. सभी $u\in C_{Id}^2\left(\bar{B};\mathbb{R}^2\right)$ के लिए $J(u)>0$ है।
3. अपरिमित: अनेक $u\in C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)$ के लिए $J(u)=1$ है।
4. सभी $u\in C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)$ के लिए $J(u)=\pi$ है।

97. Let $B=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2<1\}$, and let $C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)=\{u\in C^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)\mid u(x_1,x_2)=(x_1,x_2) \text{ for } (x_1,x_2)\in \partial B\}$.
Let $u=(u_1,u_2)$ and define $J: C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$ by

$$J(u)=\int_B\left(\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial x_1}\right)dx_1dx_2$$

Then,

1. $\inf\{J(u): u\in C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)\}=0$
2. $J(u)>0$, for all $u\in C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)$
3. $J(u)=1$, for infinitely many $u\in C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)$
4. $J(u)=\pi$, for all $u\in C_{Id}^2(\bar{B};\mathbb{R}^2)$

98. मानें कि φ समाकल समीकरण

$$\frac{1}{2}\varphi(x)-\int_0^1 e^{x-y}\varphi(y)dy=x^2 \quad 0\le x\le 1$$

का हल है। तो

1. $\varphi(0)=20e^{-1}-8$
2. $\varphi(0)=20e-8$
3. $\varphi(1)=22-8e$
4. $\varphi(1)=22-8e^{-1}$

98. Let φ be the solution of the integral equation

$$\frac{1}{2}\varphi(x)-\int_0^1 e^{x-y}\varphi(y)dy=x^2 \quad 0\le x\le 1$$

Then

1. $\varphi(0)=20e^{-1}-8$
2. $\varphi(0)=20e-8$
3. $\varphi(1)=22-8e$
4. $\varphi(1)=22-8e^{-1}$

99. एक शून्येतर, घात अधिक से अधिक 2 तक के वास्तविक मान बहुपद फलन $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ पर विचारें। मानें कि $y=y(x)$ समाकल समीकरण

$$y=p(x)+\int_0^x y(t)\sin(x-t)dt$$

का एक हल है। निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. $y(x)$ घात ≤ 2 का एक बहुपद फलन है।
2. $y(x)$ घात ≤ 4 का एक बहुपद फलन है।
3. यदि $a_1\neq 0$ तथा $a_0+2a_2=0$, तो $y'(0)=0$ है।
4. यदि $a_1\neq 0$ तथा $a_0+2a_2=0$, तो $y''(0)=0$ है।

99. Consider a non-zero, real-valued polynomial function $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ of degree at most 2. Let $y=y(x)$ be a solution of the integral equation

$$y=p(x)+\int_0^x y(t)\sin(x-t)dt$$

Which of the following statements are necessarily correct?

1. $y(x)$ is a polynomial function of degree ≤ 2
2. $y(x)$ is a polynomial function of degree ≤ 4

3. If $a_1 \neq 0$ and $a_0 + 2a_2 = 0$, then $y'(0) = 0$
4. If $a_1 \neq 0$ and $a_0 + 2a_2 = 0$, then $y''(0) = 0$

100. मानें कि $I: C^1[0,1] \to \mathbb{R}$ परिभाषित होती है

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t)^2 - 4\pi^2 u(t)^2)dt$$

हम तय करते हैं कि

$(P)\ m := \inf\{I(u): u \epsilon C^1[0,1]: u(0) = u(1) = 0\}$

मानें कि (P) से संगत ऑयलर-लग्रांज समीकरण का समाधान $\bar{u}\epsilon C^1[0,1]$ करता है। तो

1. $m = -\infty$ अर्थात् I नीचे से परिबद्ध नहीं है।
2. $m\epsilon\mathbb{R}, I(\bar{u}) = m$ के साथ
3. $m\epsilon\mathbb{R}, I(\bar{u}) > m$ के साथ
4. $m\epsilon\mathbb{R}, I(\bar{u}) < m$ के साथ

100. Let $I: C^1[0,1] \to \mathbb{R}$ be defined as

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t)^2 - 4\pi^2 u(t)^2)dt$$

Let us set

$(P)\ m := \inf\{I(u): u \epsilon C^1[0,1]: u(0) = u(1) = 0\}$

Let $\bar{u}\epsilon C^1[0,1]$ satisfy the Euler-Lagrange Equation associated with (P). Then

1. $m = -\infty$ i.e. I is not bounded below
2. $m\epsilon\mathbb{R}$, with $I(\bar{u}) = m$
3. $m\epsilon\mathbb{R}$, with $I(\bar{u}) > m$
4. $m\epsilon\mathbb{R}$, with $I(\bar{u}) < m$

101. मानें कि $X = \{u \in C^1[0,1] \,|\, u(0) = 0\}$ तथा मानें कि $I: X \to \mathbb{R}$ परिभाषित होती है $I(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - u(t)^2)dt$ द्वारा। निम्न में से कौन-से सही हैं। ?

1. I नीचे परिबद्ध है।
2. I नीचे परिबद्ध नहीं है।
3. I अपने न्यूनक पर पहुंचता है।
4. I अपने न्यूनक पर पहुंचता नहीं है।

101. Let $X = \{u \in C^1[0,1] \,|\, u(0) = 0\}$ and let $I: X \to \mathbb{R}$ be defined as

$$I(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - u(t)^2)dt$$

Which of the following are correct?

1. I is bounded below
2. I is not bounded below
3. I attains its infimum
4. I does not attain its infimum

102. $f \in C[0,1]$ तथा $n > 1$ के लिए, मानें कि समाकल $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$ का एक सन्निकटन $T(f) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)\right]$ है। निम्न फलनों f में से किसके लिये $T(f) = I(f)$ है?

1. $1 + \sin 2\pi nx$
2. $1 + \cos 2\pi nx$
3. $\sin^2 2\pi nx$
4. $\cos^2 2\pi(n+1)x$

102. For $f \in C[0,1]$ and $n > 1$, let $T(f) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)\right]$ be an approximation of the integral $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$. For which of the following functions f is $T(f) = I(f)$?

1. $1 + \sin 2\pi nx$
2. $1 + \cos 2\pi nx$
3. $\sin^2 2\pi nx$
4. $\cos^2 2\pi(n+1)x$

UNIT-4

103. किसी कोशी समष्टि पर विचारें जिसका प्रायिकता घनत्व फलन है

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\pi\{1 + (x-\theta)^2\}}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty.$$

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ उपरोक्त समष्टि से निकाला गया एक प्रतिदर्श है। θ के निम्न विश्वास्यता अंतरालों में से किनका विश्वास्यता गुणांक $1 - \alpha\ (0 < \alpha < 1)$ है?

1. $\left[X_1 - \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2},\ X_1 + \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right]$
2. $\left[\frac{X_1+X_2}{2} - \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2},\ \frac{X_1+X_2}{2} + \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right]$
3. $\left[\frac{X_1+X_2}{2} - \tan\frac{5\pi(1-\alpha)}{7},\ \frac{X_1+X_2}{2} + \tan\frac{2\pi(1-\alpha)}{7}\right]$
4. $\left[\frac{X_1+X_2+X_3}{3} - \tan\frac{5\pi(1-\alpha)}{7},\ \frac{X_1+X_2+X_3}{3} + \tan\frac{2\pi(1-\alpha)}{7}\right]$

103. Consider a Cauchy population with probability density function

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\pi\{1 + (x-\theta)^2\}}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty.$$

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from the above population. Which of the following confidence intervals for θ have confidence coefficient $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$?

1. $\left[X_1 - \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2},\ X_1 + \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right]$
2. $\left[\frac{X_1+X_2}{2} - \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2},\ \frac{X_1+X_2}{2} + \tan\frac{\pi(1-\alpha)}{2}\right]$
3. $\left[\frac{X_1+X_2}{2} - \tan\frac{5\pi(1-\alpha)}{7},\ \frac{X_1+X_2}{2} + \tan\frac{2\pi(1-\alpha)}{7}\right]$
4. $\left[\frac{X_1+X_2+X_3}{3} - \tan\frac{5\pi(1-\alpha)}{7},\ \frac{X_1+X_2+X_3}{3} + \tan\frac{2\pi(1-\alpha)}{7}\right]$

104. मानें कि $\{X_n\}$ स्वतंत्र यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जहां X_n का बंटन प्रसामान्य, माध्य μ तथा प्रसरण n है, $n = 1,2,\ldots$ के लिए। परिभाषित करें कि

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \text{ तथा } S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i} \Big/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. पर्याप्ततः बृहत n के लिए $E(\bar{X}_n) = E(S_n)$ है।
2. पर्याप्ततः बृहत n के लिए $\mathrm{Var}(S_n) < \mathrm{Var}(\bar{X}_n)$ है।
3. μ के लिए $\bar{X}_n$ अविरोधी है।
4. μ के लिए $\bar{X}_n$ पर्याप्त है।

104. Let $\{X_n\}$ be a sequence of independent random variables where the distribution of X_n is normal with mean μ and variance n for $n = 1,2,\ldots$ Define

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \text{ and } S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i} \Big/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Which of the following are true?

1. $E(\bar{X}_n) = E(S_n)$ for sufficiently large n
2. $\mathrm{Var}(S_n) < \mathrm{Var}(\bar{X}_n)$ for sufficiently large n
3. $\bar{X}_n$ is consistent for μ
4. $\bar{X}_n$ is sufficient for μ

105. मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ प्रायिकता घनत्व फलन या प्रायिकता द्रव्यमान फलन $f_\theta(x)$ से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। परिभाषित करें $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, जहां $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ है। तो s_n^2 अभिनत है θ के लिए यदि

1. $f_\theta(x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots$ तथा $\theta > 0$
2. $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}},\ -\infty < x < \infty,\ \theta > 0$
3. $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}},\ x > 0,\ \theta > 0$
4. $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x},\ x > 0,\ \theta > 0$

105. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from $f_\theta(x)$, a probability density function or a probability mass function. Define $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, where $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Then s_n^2 is unbiased for θ if

1. $f_\theta(x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots$ and $\theta > 0$
2. $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}},\ -\infty < x < \infty,\ \theta > 0$
3. $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}},\ x > 0,\ \theta > 0$
4. $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x},\ x > 0,\ \theta > 0$

106. $n \geq 1$ के लिए मानें कि X_n माध्य n^2 का एक प्वासों यादृच्छिक चर है। निम्न में से कौन-से $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_2^\infty e^{-x^2/2}\,dx$ के समान है?

1. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n > (n+1)^2\}$
2. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n \leq (n+1)^2\}$
3. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n < (n-1)^2\}$
4. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n < (n-2)^2\}$

106. For $n \geq 1$, let X_n be a Poisson random variable with mean n^2. Which of the following are equal to

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_2^\infty e^{-x^2/2}\,dx$$

1. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n > (n+1)^2\}$
2. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n \leq (n+1)^2\}$
3. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n < (n-1)^2\}$
4. $\lim_{n\to\infty} P\{X_n < (n-2)^2\}$

107. निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. यदि X तथा Y, $N(0,1)$ है, तो $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\,N(0,1)$ है।
2. यदि X तथा Y स्वतंत्र $N(0,1)$ हैं तो $\frac{X}{Y}$ का t-बंटन है।
3. यदि X तथा Y स्वतंत्र एकसमान $(0,1)$ हैं, तो $\frac{X+Y}{2}$ एकसमान $(0,1)$ है।
4. यदि X द्विपद (n,p) है तो $n-X$ द्विपद $(n,1-p)$ है।

107. Which of the following are correct?

1. if X and Y are $N(0,1)$ then $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ is $N(0,1)$
2. if X and Y are independent $N(0,1)$ then $\frac{X}{Y}$ has t-distribution
3. if X and Y are independent Uniform$(0,1)$ then $\frac{X+Y}{2}$ is Uniform$(0,1)$
4. if X is Binomial(n,p) then $n-X$ is Binomial$(n,1-p)$

108. पांच अवस्थायें $\{1,2,3,4,5\}$ तथा एक संक्रमण आव्यूह

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

युक्त एक मार्कोव श्रंखला पर विचारें। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. 3 तथा 1 एक ही संक्रामी वर्ग में हैं।
2. 1 तथा 4 एक ही संक्रामी वर्ग में हैं।
3. 4 तथा 2 एक ही संक्रामी वर्ग में हैं।
4. 2 तथा 5 एक ही संक्रामी वर्ग में हैं।

108. Consider a Markov chain with five states $\{1,2,3,4,5\}$ and transition matrix

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Which of the following are true?

1. 3 and 1 are in the same communicating class
2. 1 and 4 are in the same communicating class
3. 4 and 2 are in the same communicating class
4. 2 and 5 are in the same communicating class

109. मानें कि 1 के समान 3 प्रविष्टियां तथा 0 के समान 6 प्रविष्टियां युक्त 3×3 आव्यूहों के समुच्चय S है। समुच्चय S से एक आव्यूह M एकसमानत: यादृच्छिकत: चुना जाता है। तो

1. $P\{M$ व्युत्क्रमणीय है$\}=\frac{1}{14}$
2. $P\{M$ की जाति 1 है$\}=\frac{1}{14}$
3. $P\{M$ तत्समक है$\}=\frac{1}{14}$
4. $P\{$अनुरेख$(M)=0\}=\frac{1}{14}$

109. Let S be the set of all 3×3 matrices having 3 entries equal to 1 and 6 entries equal to 0. A matrix M is picked uniformly at random from the set S. Then

1. $P\{M$ is nonsingular$\}=\frac{1}{14}$
2. $P\{M$ has rank 1$\}=\frac{1}{14}$
3. $P\{M$ is identity$\}=\frac{1}{14}$
4. $P\{\text{trace}(M)=0\}=\frac{1}{14}$

110. मानें कि A,B,C एक सार्व प्रायिकता समष्टि में घटनायें हैं
$P(A)=0.2\quad P(B)=0.2\quad P(C)=0.3$
$P(A\cap B)=0.1\quad P(A\cap C)=0.1\quad P(B\cap C)=0.1$
के साथ। निम्न में से कौन-से $P(A\cup B\cup C)$ के संभाव्य मान हैं?

1. 0.5
2. 0.3
3. 0.4
4. 0.9

110. Suppose A,B,C are events in a common probability space with
$P(A)=0.2\quad P(B)=0.2\quad P(C)=0.3$
$P(A\cap B)=0.1\quad P(A\cap C)=0.1\quad P(B\cap C)=0.1$
Which of the following are possible values of $P(A\cup B\cup C)$?

1. 0.5
2. 0.3
3. 0.4
4. 0.9

111. एक $M/M/1$ कतार पर विचारें, जिसके अंतरागमन समय का माध्य $\frac{1}{\lambda}$ के साथ एक चरघातांकी बंटन है तथा सेवाकाल माध्य $\frac{1}{\mu}$ के

साथ एक चरघातांकी बंटन है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. यदि $0 < \lambda < \mu$ है तो कतार लंबाई का सीमांत बंटन प्वासों $(\mu - \lambda)$ है।
2. यदि $0 < \lambda < \mu$ है तो कतार लंबाई का सीमांत बंटन प्वासों $(\lambda - \mu)$है।
3. यदि $0 < \lambda < \mu$ है तो कतार लंबाई का सीमांत बंटन ज्यामितीय है।
4. यदि $0 < \mu < \lambda$ है तो कतार लंबाई का सीमांत बंटन ज्यामितीय है।

111. Consider an $M/M/1$ queue with interarrival time having exponential distribution with mean $\frac{1}{\lambda}$ and service time having exponential distribution with mean $\frac{1}{\mu}$. Which of the following are true?

1. if $0 < \lambda < \mu$ then the queue length has limiting distribution Poisson $(\mu - \lambda)$
2. if $0 < \mu < \lambda$ then the queue length has limiting distribution Poisson $(\lambda - \mu)$
3. if $0 < \lambda < \mu$ then the queue length has limiting distribution which is geometric
4. if $0 < \mu < \lambda$ then the queue length has limiting distribution which is geometric

112. किसी दूकान में ग्राहकों का आगमन तीव्रता $\lambda = 2$ युक्त एक प्वासों प्रक्रिया है। मानें कि समय अंतराल $(1, 2)$ के दौरान प्रवेश करते ग्राहकों कि संख्या X है तथा समय अंतराल $(5, 10)$ के दौरान प्रवेश करते ग्राहकों की संख्या Y है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. $P(X = 0 \mid X + Y = 12) = \left(\frac{5}{6}\right)^{12}$
2. X तथा Y स्तवंत्र हैं
3. $X + Y$ प्राचल 6 युक्त प्वासें है।
4. $X - Y$ प्राचल 8 युक्त प्वासें है।

112. Arrival of customers in a shop is a Poisson process with intensity $\lambda = 2$. Let X be the number of customers entering during the time interval $(1, 2)$ and let Y be the number of customers entering during the time interval $(5, 10)$. Which of the following are true?

1. $P(X = 0 \mid X + Y = 12) = \left(\frac{5}{6}\right)^{12}$
2. X and Y are independent
3. $X + Y$ is Poisson with parameter 6
4. $X - Y$ is Poisson with parameter 8

113. समय 0 पर प्रारंभित एक जीवन परीक्षण प्रयोग में बीस सर्वथासमान वस्तुयें रखी जाती हैं। वस्तुओं की विफलता समय एक क्रमबद्ध तरीके से अंकित किये जाते है। यदि सभी वस्तुयें विफ़ल हो जाती हैं, या जब एक पूर्व निर्धारित $T > 0$ पर समय पहुंचता है, दोनों में जो भी पहले घटता है तब प्रयोग रूक जाता है। यदि प्रायोगिक वस्तुओं के आयुकाल माध्य θ, जहां $0 < \theta \leq 10$ है, युक्त एक स्वतंत्र सर्वथासमान बंटित चरघातांकी यादृच्छिक चर हैं, तो निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. θ के अ सं आ का अस्तित्व हमेशा है।
2. θ के अ सं आ के अस्तित्व के होने की आवश्यकता नहीं है।
3. θ का अ सं आ, यदि उसका अस्तित्व है तो वह θ का एक अनभिनत आकलज है।
4. θ का अ सं आ, यदि उसका अस्तित्व है तो वह प्रायिकता 1 के साथ परिबद्ध है।

113. Twenty identical items are put in a life testing experiment starting at time 0. The failure times of the items are recorded in a sequential manner. The experiment stops if all the items fail or a pre-fixed time $T > 0$ is reached, whichever is earlier. If the lifetimes of the items are independent identically distributed exponential random variables with mean θ, where $0 < \theta \leq 10$, then which of the following statements are correct?

1. the MLE of θ always exists
2. the MLE of θ may not exist
3. the MLE of θ is an unbiased estimator of θ, if it exists
4. the MLE of θ is bounded with probability 1, if it exists

114. एक सं अ खं अ (v, b, r, k, λ), $k = 5$ के साथ पर विचारें। मानें कि $N = \left((n_{ij})\right)$ आयतन आव्यूह है, जहां $n_{ij} =$ ith खण्ड में jth उपचार के प्रकट होने की संख्या है, $1 \leq i \leq v, 1 \leq j \leq b$. मानें कि $C = rI - \frac{1}{k}NN^t$. निम्न में से कौन-से सहीं है?

1. C का एक अभिलक्षणिक मूल 0 है।
2. N की जाति v है।
3. उपरोक्त सं अ खं अ संबद्ध है।
4. C का अनुरेख $4b$ है।

114. Consider a BIBD(v, b, r, k, λ) with $k = 5$. Let $N = \left((n_{ij})\right)$ be the incidence matrix, where n_{ij} = number of times ith treatment appears in jth block, $1 \le i \le v, 1 \le j \le b$. Let $C = rI - \frac{1}{k}NN^t$. Which of the following are true?
1. C has a characteristic root 0
2. rank of N is v
3. the above BIBD is connected
4. trace of the C is $4b$

115. मानें कि k समूह हैं तथा प्रत्येक में N लड़के शामिल हैं। हम इन kN लड़कों की माध्य आयु μ का आकलन करना चाहते हैं। स्थिर करें कि $1 < n < N$, तथा निम्न दो प्रतिचयन योजनाओं पर विचारें।

I. सभी kN लड़कों में से, बिना प्रतिस्थापन के, आमाप kn का, एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श निकालें।

II. k समूहों में से प्रत्येक से आमाप n का, बिना प्रतिस्थापन के एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श निकालें।

मानें कि $\bar{Y}$ तथा $\overline{Y_G}$ क्रमश: दोनों योजनाओं के अंतर्गत प्रतिदर्श माध्य आयु हैं। निम्न में से कौन-से सही हैं?
1. $E(\bar{Y}) = \mu$
2. $E(\overline{Y_G}) = \mu$
3. कुछ विषयों में प्रसरण $(\bar{Y})$, प्रसरण $(\overline{Y_G})$ से कम हो सकता है।
4. यदि सभी स्तर माध्य समान है तो प्रसरण$(\bar{Y})$ = प्रसरण$(\overline{Y_G})$ है।

115. Suppose there are k groups each consisting of N boys. We want to estimate the mean age μ of these kN boys. Fix $1 < n < N$ and consider the following two sampling schemes.

I. Draw a simple random sample without replacement of size kn out of all kN boys.

II. From each of the k groups draw a simple random sample with replacement of size n.

Let $\bar{Y}$ and $\overline{Y_G}$ be the respective sample mean ages for the two schemes. Which of the following are true?
1. $E(\bar{Y}) = \mu$
2. $E(\overline{Y_G}) = \mu$
3. $\mathrm{Var}(\bar{Y})$ may be less than $\mathrm{Var}(\overline{Y_G})$ in some cases
4. $\mathrm{Var}(\bar{Y}) = \mathrm{Var}(\overline{Y_G})$ if all the group means are same

116. मानें कि $X_1, \dots, X_n$ स्व.सर्व.बं. यादृच्छिक सदिश हैं $N_p(0, \Sigma)$ से। मानें कि $\ell \in \mathbb{R}^p$,
$E\left(\sum_{i=1}^{n} \ell^t X_i X_i^t \ell\right) = c$ तथा $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^t\right) = A$
निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?
1. $c = \ell^t \ell$
2. $\ell^t\left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^t\right)\ell$ एक काई-वर्ग बंटन का अनुकरण करता है।
3. $1 \le n_1 \le n-1$ के लिए $\ell^t\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i X_i^t\right)\ell$ तथा $\ell^t\left(\sum_{i=n_1+1}^{n} X_i X_i^t\right)\ell$ स्वतंत्रत: बंटित हैं।
4. $A = \Sigma$

116. Suppose $X_1, \dots, X_n$ are i.i.d. random vectors from $N_p(0, \Sigma)$. Let $\ell \in \mathbb{R}^p, E\left(\sum_{i=1}^{n} \ell^t X_i X_i^t \ell\right) = c$ and $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^t\right) = A$
Which of the following statements are necessarily true?
1. $c = \ell^t \ell$
2. $\ell^t\left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^t\right)\ell$ follows a chi-squared distribution
3. $\ell^t\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i X_i^t\right)\ell$ and $\ell^t\left(\sum_{i=n_1+1}^{n} X_i X_i^t\right)\ell$ are independently distributed for $1 \le n_1 \le n-1$.
4. $A = \Sigma$

117. मानें कि हमारें पास अमाप $n\,(n \ge 1)$ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श घनत्व
$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$
से है। यदि λ का पूर्व, माध्य 1 का एक चरघातांकी बंटन है, तो निम्न कथनों में से कौन-से सही है?
1. λ का पश्च बंटन एक चरघातांकी बंटन है।
2. वर्गकृत त्रृटि क्षय फलन के संदर्भ में λ के बेज़ आकलज का अस्तित्व है तथा वह अद्‌वितीय है।
3. निरक्षेप त्रृटि क्षय फलन के संदर्भ में λ के बेज़ आक़लज का अस्तित्व है तथा वह अद्‌वितीय है।
4. $e^{-\lambda}$ के बेज़ आकलज़ का अस्तित्व नहीं है।

117. Suppose we have a random sample of size n $(n \geq 1)$ from the density

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

If the prior of λ is an exponential distribution with mean 1, then which of the following statements are correct?

1. the posterior distribution of λ is an exponential distribution
2. the Bayes estimator of λ w.r.t. the squared error loss function exists and is unique
3. the Bayes estimator of λ w.r.t. the absolute error loss function exists and is unique
4. the Bayes estimator of $e^{-\lambda}$ does not exist

118. मानें कि $X_1, \ldots, X_n$, $N(\theta, 1)$, $\theta \in [-100, 100]$ से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है तथा $Y_1, \ldots, Y_n$ परिभाषित हैं

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{यदि } X_i < 0 \\ 1 & \text{यदि } X_i \geq 0 \end{cases}$$

मानें कि $\hat{\theta}_n$ तथा $\tilde{\theta}_n$ क्रमश: $\{X_1, \ldots, X_n\}$ पर तथा $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, पर आधारित, θ अ.सं.आ. को निर्दिष्ट करते हैं। तो निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$
2. $\lim_{n\to\infty} E(\tilde{\theta}_n) = \theta$
3. θ का एक अविरोधी आकलज $\hat{\theta}_n$ है।
4. θ का एक अविरोधी आकलज $\tilde{\theta}_n$ है।

118. Let $X_1, \ldots, X_n$ be a random sample from $N(\theta, 1)$, $\theta \in [-100, 100]$ and let $Y_1, \ldots, Y_n$ be defined by

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{if } X_i < 0 \\ 1 & \text{if } X_i \geq 0 \end{cases}$$

Suppose $\hat{\theta}_n$ and $\tilde{\theta}_n$ denote the MLEs of θ based on $\{X_1, \ldots, X_n\}$ and on $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, respectively. Which of the following statements are true?

1. $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$
2. $\lim_{n\to\infty} E(\tilde{\theta}_n) = \theta$
3. $\hat{\theta}_n$ is a consistent estimator of θ
4. $\tilde{\theta}_n$ is a consistent estimator of θ

119. निम्न समाश्रयण समस्या पर विचारें

$y_i = \beta_1 e^i + \beta_2 e^{-i} + \epsilon_i;\ i = 1, \ldots, n.$

यहां $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ है, स्व.सर्व.बं. $N(0, \sigma^2)$ यादृच्छिक चर हैं। यदि β_1 तथा β_2, के न्यूनतम वर्ग आकलज $\hat{\beta}_1$ तथा $\hat{\beta}_2$ हैं तो निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
2. $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$
3. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) > \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$
4. $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) < 0$

119. Consider the following regression problem

$y_i = \beta_1 e^i + \beta_2 e^{-i} + \epsilon_i;\ i = 1, \ldots, n.$

Here $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ are i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ random variables. If $\hat{\beta}_1$ and $\hat{\beta}_2$ are the least square estimators of β_1 and β_2, respectively, then which of the following statements are correct?

1. $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$
2. $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$
3. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) > \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$
4. $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) < 0$

120. मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ मध्यिका θ युक्त एक अज्ञात संतत बंटन फलन F से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। मानें कि T_n, i की उस संख्या है जिसके लिए $X_i > 0$ है। परीक्षण प्रतिदर्शज T_n पर आधारित $H_0: \theta = 0$ बनाम $H_1: \theta = -1$ परीक्षण समस्या पर विचारें। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. H_1 के अधीन T_n का बंटन F से स्वतंत्र है।
2. H_1 के विरूद्ध T_n पर आधारित बायें पुच्छ परीक्षण अविरोधी है।
3. T_n पर आधारित बायें पुच्छ H_1 के विरूद्ध परीक्षण अनभिनत है।
4. H_1 के अधीन T_n पर आधारित बायें पुच्छ परीक्षण p-मान $P[T_n \leq$ प्रेक्षित $T_n]$ है।

120. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from an unknown continuous distribution function F with median θ. Let T_n count the number of i for which $X_i > 0$. Consider the problem of testing $H_0: \theta = 0$ against $H_1: \theta = -1$ based on the test statistic T_n. Which of the following are true?

1. the distribution of T_n is independent of F under H_1
2. left-tailed test based on T_n is consistent against H_1
3. left-tailed test based on T_n is unbiased against H_1
4. left-tailed test based on T_n has the p-value $P[T_n \leq$ observed $T_n]$ under H_1

FOR ROUGH WORK

FOR ROUGH WORK